Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: N7503 Učitelství pro 2. st. ZŠ

Studijní obor: (kombinace) matematika - informatika

LINEÁRNÍ ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

LINEAR EQUATIONS AND SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN SCHOOL MATHEMATICS

Diplomová práce: 11–FP–KMD–001

Autor:
Lucie Staňková

Podpis:

Adresa:
Třebenice 110
675 52, Lipník u Hrotovic

Vedoucí práce: RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Konzultant: Ing. Miroslav Chládek

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
147	3	44	4	50	12

V Liberci dne: 10. 12. 2010

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE
(pro magisterský studijní program)

pro (diplomant):	Lucie Staňková
adresa:	Třebenice 110, Lipník u Hrotovic, 675 52
studijní obor (kombinace):	Učitelství pro 2. st. ZŠ, Matematika - Informatika
Název DP:	**Lineární rovnice a jejich soustavy na základní škole**
Název DP v angličtině:	Linear equations and systems of linear equations in school mathematics
Vedoucí práce:	RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.
Konzultant:	
Termín odevzdání:	květen 2010

Poznámka: Podmínky pro zadání práce jsou k nahlédnutí na katedrách. Katedry rovněž formulují podrobnosti zadání. Zásady pro zpracování DP jsou k dispozici ve dvou verzích (stručné, resp. metodické pokyny) na katedrách a na Děkanátě Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické TU v Liberci.

V Liberci dne 27.4.2009

M. Kubátová — děkan

Karel Segeth — vedoucí katedry

Převzal (diplomant): ______

Datum: ______ Podpis: Staňková

Název DP:	LINEÁRNÍ ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE
Vedoucí práce:	RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.
Cíl:	1) Shrnout téma lineárních rovnic a jejich soustav, a to jak z pohledu vyšší matematiky, tak z pohledu matematiky na 2. stupni. základní školy. Zopakovat základní teorii související s tématem (vektorové prostory, otázky existence a jednoznačnosti řešení, metody řešení – Gaussovu eliminaci, řešení pomocí inverzní matice, Cramerovo pravidlo). Ve školské matematice se zaměřit na soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými, poukázat na souvislost problému s (analytickou) geometrií v rovině (vzájemná poloha dvou přímek) a rekapitulovat pojetí tématu v současné české škole. 2) Pro žáky 2. stupně ZŠ vytvořit sbírku úloh na dané téma; úlohy by měly být dostatečně pestré, měly by se v nich vyskytovat i grafická řešení a aplikace rovnic a jejich soustav ve slovních úlohách. Pokusit se využít mezipředmětových vztahů v rámci matematiky i vně. Předpokládaný rozsah sbírky: nejméně 30 vyřešených úloh různých typů. 3) Některé z úloh otestovat při práci s žáky na vybrané základní škole, příp. školách, experiment vyhodnotit.
Požadavky:	Dobrá orientace v lineární algebře v rozsahu vysokoškolského kurzu na FP, schopnost tvůrčí práce.
Metody:	Tvorba a zpracování sbírky k danému tématu.
Literatura:	Učební texty k úvodním kurzům lineární algebry na VŠ. Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava 1990. Učebnice matematiky pro základní školu.

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucí diplomové práce a konzultantem.

Datum 10. 12. 2010

Podpis

Poděkování:

Chtěla bych poděkovat své vedoucí práce RNDr. Aleně Kopáčkové, Ph.D. za metodickou pomoc a odborné vedení při zpracovávání diplomové práce.

Dále bych ráda poděkovala Ing. Miroslavu Chládkovi, který mi byl nápomocen při spolupráci se ZŠ ve Valči, zapůjčil mi potřebné materiály a poskytnul mi velmi cenné rady.

LINEÁRNÍ ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

STAŇKOVÁ Lucie   **DP-2011**   **Vedoucí DP:** RNDr. Alena Kopáčková, Ph.D.

Anotace

V teoretické části diplomové práce jsou shrnuty základní poznatky o lineárních rovnicích a jejich soustavách, a to jak z pohledu vyšší matematiky, tak z pohledu matematiky na 2. stupni základních škol.

Hlavním přínosem diplomové práce je praktická část, která obsahuje sbírku úloh na dané téma. Všechny příklady jsou řešené a poskytují názornou ukázku postupu a vhodnou formu zápisu řešení úloh. Ve sbírce je kladen důraz na posílení mezipředmětových vztahů. Některé z úloh byly otestovány při práci s žáky na 2. stupni ZŠ a následně vyhodnoceny. Praktická část obsahuje rovněž soubor počítačových didaktických testů, které umožňují využití informačních technologií při výuce matematiky, poskytují příjemné prostředí k procvičení učiva a tím přispívají k novému pojetí výuky na ZŠ.

Klíčová slova: rovnice, lineární rovnice, funkce, lineární funkce, soustavy lineárních rovnic, přímka, rovina, prostor, matice, determinant.

Summary

In the theoretical part of this diploma there are summarized the basic knowledge about on linear equation and their system, not only in point of view of higher mathematics but also in point of view of mathematics in low secondary school.

The main contribution of this diploma is the practical part, which contains a task collection dealing with this topic. All examples are with particular results, and there is also mentioned the procedure and suitable forms of notation. In this task collection there are emphasized especially interdisciplinary relationships. Some tasks were tested by students at low secondary school in Valeč with subsequent evaluation. The practical part contains also a set of methodological tests created in a computer program which provides the usage of information technologies during the educational process, there is also nice environment to practice curriculum and the tests contribute to the new conception of education in low secondary school.

Key words: equations, linear equations, functions, linear functions, systems of linear equations, straight line, plane, space, matrices, determinants.

Annotation

Im theoretischen Teil der Diplomarbeit sind alle Grunderkenntnisse über lineare Gleichungen zusammengefasst so wie aus der Ansicht der höheren Mathematik, als auch auf der Ansicht in den 2-Stufigen Grundschulen.

Der Hauptbeitrag der Diplomarbeit ist der praktische Teil, der die gesammelten Aufgaben auf das gegebene Thema enthält. Alle Beispiele sind gelöst und bieten eine anschauliche Vorstellung des Vorganges und eine passende Form der Aufgabenlösung. In der Sammlung liegt das Schwergewicht auf die Verstärkung intergrierter Verhältnisse gelegt. Manche Aufgaben wurden bei der Arbeit an der 2-Stufe der Grundschulen getestet und ausgewertet. Der praktische Teil enthält ebenso die Gesamtheit didaktischer Teste, welche die Nützung informativer Technologien bei der Lehre der Mathematik ausnützen, bieten ein angewehne Milieu zum durchüben der Lehrstoffes und damit tragen sie zu neuen Vorstellung der Unterichte auf den Grundschulen bei.

Schlüsselwörter: die Gleichung, die Geradengleichung, die Funktion, die Linearfunktion, das Geradengleichungssystem, die Gerade, die Ebene, der Raum, die Matrix, die Determinante.

Obsah

Úvod **10**
1 Rámcový vzdělávací program **12**
1.1 Úvod 12
1.1.1 Principy RVP ZV 12
1.1.2 Matematika v RVP 13
1.2 Školní vzdělávací program 15
2 Označení **18**
3 Funkce **19**
3.1 Reálná funkce jedné reálné proměnné 20
3.2 Vlastnosti funkcí 20
3.3 Lineární funkce 22
4 Rovnice **23**
4.1 Metodika zavedení rovnic 24
4.2 Postup při řešení rovnic 25
4.3 Algebraické rovnice 27
4.4 Lineární rovnice o jedné neznámé 27
4.5 Lineární rovnice o dvou neznámých 27
4.6 Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých 28
4.6.1 Početní řešení 29
4.6.2 Grafické řešení 30
5 Vektory **33**
5.1 Vlastnosti vektorů 33
6 Přímka v rovině **35**
6.1 Vzájemná poloha dvou přímek v rovině 35
6.2 Parametrické a obecné vyjádření roviny 36
6.3 Parametrické a obecné vyjádření přímky 36
7 Přímka v prostoru **40**
7.1 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru 40
7.2 Parametrické vyjádření přímky v prostoru 41
8 Matice **43**
8.1 Operace s maticemi 43
8.2 Typy matic 44
8.3 Hodnost matice 45
8.4 Elementární úpravy matice 45
9 Determinant **47**
9.1 Výpočet determinantu 47
9.2 Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce) 49
10 Soustava *m* lineárních rovnic o *n* neznámých **51**
10.1 Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic 52
10.2 Řešení 53
10.2.1 Gaussova eliminační metoda 53
10.2.2 Cramerovo pravidlo 56
10.2.3 Inverzní matice 58
10.2.4 Závěrečné shrnutí 61
11 Sbírka úloh **62**
11.1 Lineární rovnice s jednou neznámou 64
11.2 Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých 78

11.3 Grafické řešení lineárních rovnic ... 97
11.4 Grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých ... 100
11.5 Slovní úlohy ... 104
11.5.1 Úlohy, ve kterých rozdělujeme celek na nestejné části ... 104
11.5.2 Slovní úlohy o pohybu ... 106
11.5.3 Úlohy o směsích různě koncentrovaných látek ... 109
11.5.4 Slovní úlohy vedoucí k soustavě rovnic ... 110
11.6 Rovnice vedoucí po úpravě na řešení lineárních rovnic ... 120
11.6.1 Kvadratické členy ... 120
11.6.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli ... 122
12 Didaktické využití výpočetní techniky v hodinách matematiky ... 126
13 Aplikace testu na základní škole ... 132
Závěr ... 140
Seznam použité literatury ... 142
Seznam literatury pro sbírku úloh ... 145
Přílohy ... 147

Úvod

Naše školství prošlo od druhé světové války početnou řadou reforem a změn koncepcí jak organizačních, tak i obsahových. Po roce 1948 se v matematice začíná projevovat větší orientace na teoretické poznatky, což se ještě prohloubilo v 70. letech 20. století. S příchodem Rámcového vzdělávacího programu, který byl publikován ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v roce 2001, přišly i nové, pozitivní tendence pro výuku. Důležitým přínosem bylo mimo jiné posílení mezipředmětových vztahů a chápání vzájemných souvislostí mezi jednotlivými vzdělávacími oblastmi.

Problém izolace jednotlivých předmětů a potřeba propojování vzdělávacích obsahů se staly jedním z důvodů, proč jsem si vybrala téma „Lineární rovnice a jejich soustavy na základní škole." Toto téma je velice důležité nejen pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace, ale své uplatnění nalezne i v ostatních vzdělávacích oborech jako je tomu např. u chemie, fyziky, přírodopisu, zeměpisu a dalších.

Ačkoliv hovoříme o jednom z nejpodstatnějších vzdělávacích obsahů, je třeba poznamenat, že mnohdy se jedná o učivo, které žákům činí značné potíže. Nabízí se nám hned několik základních a podstatných otázek. Jak můžeme přispět k tomu, abychom pomohli k lepšímu osvojení a procvičení učiva? Jak můžeme pomoci k posílení mezipředmětových vztahů a tím zamezit poznatkové roztříštěnosti a nepochopení souvislostí mezi jednotlivými vzdělávacími obory?

Ze zvoleného tématu a zmíněné problematiky také vychází cíl této diplomové práce.

Cílem teoretické části je rozpracování tématu, a to jak z pohledu vyšší matematiky, tak z pohledu matematiky školské.

Cílem praktické části je vytvoření sbírky úloh na dané téma pro 2. stupeň ZŠ.

Diplomová práce se skládá ze 13 kapitol, z nichž prvních deset je teoretických, zbývající tři jsou praktické.

V teoretické části si shrneme základní poznatky o lineárních rovnicích a jejich soustavách, které jsou využity v praktické části při tvorbě sbírky úloh. Dále se v teoretické části zabýváme teorií vyšší matematiky, poukazující na možnosti rozšíření školské matematiky do vyšších úrovní. Definujeme relevantní, základní pojmy, které je potřebné znát při řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých. Analogicky je tomu i u školské matematiky, kde při grafickém řešení soustavy lineárních rovnic je třeba definovat další odvětví, konkrétně funkce.

Těžištěm diplomové práce je praktická část, která obsahuje sbírku úloh. V běžné praxi se setkáváme s různými druhy matematických sbírek. Otázkou k zamyšlení je, zdali jsou tyto publikace dostačující vzhledem k názornosti řešení konkrétních úloh. Sbírka úloh, obsažená v této diplomové práci, zahrnuje soubor názorně řešených příkladů, které žákům poskytují pochopitelný a jasný postup, vedoucí ke správnému řešení dané úlohy. Dále obsahuje ukázkové testy, které jsou aplikovány a následně vyhodnoceny v devátém ročníku Základní školy ve Valči, ve spolupráci s mým konzultantem (viz příloha č. 5 – 12). V rámci mezipředmětových vztahů je sbírka složena ze slovních úloh, které se zabývají různými vzdělávacími obory, jako je např. fyzika, chemie, přírodopis, zeměpis, aj.

Informační a komunikační technologie sehrávají v současné době v životě škol i žáků velmi důležitou roli. Zasahují do veškerého chodu školy, výuku nevyjímaje. (Zounek, 2006)

Z tohoto důvodu jsem se rozhodla do této diplomové práce zařadit soubor počítačových didaktických testů, které žákům slouží k procvičení aktuálního tématu a poskytují okamžitou zpětnou vazbu (viz kapitola 12).

Prostřednictvím této diplomové práce mohu přispět k procvičení daného tématu a k posílení mezipředmětových vztahů. Přínosem je rovněž možnost využití informačních technologií při výuce matematiky.

1 Rámcový vzdělávací program

V této kapitole se budeme zabývat Rámcovým vzdělávacím programem se zaměřením na výuku matematiky na 2. stupni základní školy a školním vzdělávacím programem.

Podkladem pro zpracování této kapitoly je Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (VÚT Praha, 2007), publikace „Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu“ (Fuchs, Hospešová, Lišková, 2006) a Školní vzdělávací program (ZŠ Valeč, 2009).

1.1 Úvod

V souladu s novými principy kurikulární politiky se do vzdělávací soustavy zavádí nový systém kurikulárních dokumentů pro vzdělávání žáků od 3 do 19 let. Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na dvou úrovních – státní a školní. Státní úroveň v systému kurikulárních dokumentů představují Národní program vzdělávání a rámcové vzdělávací programy (dále jen RVP). Národní program vzdělávání vymezuje počáteční vzdělávání jako celek. RVP vymezují závazné rámce vzdělávání pro jeho jednotlivé etapy – předškolní, základní a střední vzdělávání. Školní úroveň představují školní vzdělávací programy (dále jen ŠVP), podle nichž se uskutečňuje vzdělávání na jednotlivých školách. (VÚP Praha, 2007, s. 9)

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále RVP ZV) byl publikován ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy v roce 2001. Přináší s sebou nové, pozitivní tendence pro výuku. Zaměřuje se spíše na cílové kompetence žáka než na soubory poznatků.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání je pedagogický dokument, který je v určitých časových intervalech inovován podle měnících se potřeb společnosti a zkušeností učitelů. Ovlivňuje a usměrňuje vzdělávání na všech typech škol, které poskytují základní vzdělávání. (VÚP Praha, 2007)

1.1.1 Principy RVP ZV

Základní vzdělávání je jedinou životní etapou vzdělávání, kterou povinně absolvuje celá populace. Je rozděleno do dvou celků – 1. a 2. stupeň.

K podstatným úkolům základního vzdělávání patří naučit žáky tvořivě myslet a řešit přiměřené problémy, účinně komunikovat a spolupracovat, chránit své fyzické i duševní zdraví, vytvořené hodnoty a životní prostředí, být ohleduplný a tolerantní, poznávat své možnosti. Zároveň však má žáky motivovat k pokračování ve vzdělávání v oborech vzdělávání středních škol a následně i terciárního vzdělávání, ale také současně i k celoživotnímu učení, jehož nezbytnost je spojena s životem v moderní společnosti. Mezi hlavní úkol také patří osvojení základních znalostí a dovedností. (MŠMT, 2009)

RVP ZV (VÚP Praha, 2007, s. 10):

- *navazuje svým pojetím na Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání (RVP PV) a je východiskem pro koncepci rámcových vzdělávacích programů pro střední vzdělávání;*
- *vymezuje vše, co je společné a nezbytné v povinném základním vzdělávání žáků, včetně vzdělávání v odpovídajících ročnících víceletých středních škol;*
- *specifikuje úroveň klíčových kompetencí, jíž by měli žáci dosáhnout na konci základního vzdělávání;*
- *vymezuje vzdělávací obsah – očekávané výstupy a učivo;*
- *zařazuje jako závaznou součást základního vzdělávání průřezová témata s výrazně formativními funkcemi;*
- *podporuje komplexní přístup k realizaci vzdělávacího obsahu, včetně možnosti jeho vhodného propojování, a předpokládá volbu různých vzdělávacích postupů, odlišných metod, forem výuky a využití všech podpůrných opatření ve shodě s individuálními potřebami žáků;*
- *umožňuje modifikaci vzdělávacího obsahu pro vzdělávání žáků se speciálními vzdělávacími potřebami;*
- *je závazný pro všechny střední školy při stanovování požadavků přijímacího řízení pro vstup do středního vzdělávání.*

Vzdělávací obsah je v RVP ZV rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Vzdělávací oblasti jsou tvořeny vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými obory:

1. Jazyk a jazyková komunikace *(Český jazyk a literatura, Cizí jazyk)*
2. Matematika a její aplikace *(Matematika a její aplikace)*
3. Informační a komunikační technologie *(Informační a komunikační technologie)*
4. Člověk a jeho svět *(Člověk a jeho svět)*
5. Člověk a společnost *(Dějepis, Výchova k občanství)*
6. Člověk a příroda *(Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis)*
7. Umění a kultura *(Hudební výchova, Výtvarná výchova)*
8. Člověk a zdraví *(Výchova ke zdraví, Tělesná výchova)*
9. Člověk a svět práce *(Člověk a svět práce)*

1.1.2 Matematika v RVP

Jednou z devíti vzdělávacích oblastí je „Matematika a její aplikace“ Tato oblast je především založena na aktivní činnosti žáků – při práci s matematickými objekty a především využití matematiky v reálných situacích. Hlavním cílem je poskytnout žákům takové vědomosti a dovednosti, které uplatní v praktickém životě. Je zde kladen důraz na to, že si nestačí pouze osvojit početní, respektive konstrukční návyky. Matematické vzdělávání má rozvíjet abstraktní, kauzální, exaktní a analyticko-syntaktické myšlení, logické a kritické usuzování. Žáci si osvojují nejen matematické pojmy, symboliku a základy matematického jazyka, ale také možnost jejich užití. Je důležité, aby došlo k porozumění složitosti reálného světa. Vede žáky k organizování vlastní práce. Přispívá k tvořivosti, důslednosti, sebekontrole, vynalézavosti, sebedůvěře, pracovitosti a soustředěnosti. (VÚP Praha, 2007)

Matematické vzdělání také zahrnuje (VÚP Praha, 2007, s. 29-30):

- *rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů;*
- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů;*
- *rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů;*
- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu;*
- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely;*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému;*
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu;*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby;*
- *rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů;*
- *využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace.*

Pojetí a cíle na 2. stupni základního vzdělávání:

Cíle vzdělávací oblasti „Matematika a její aplikace“ bývají rozpracovány do učebního předmětu (oboru) matematika. Ten byl tradičně uváděn osnovami.

Ve vzdělávacím obsahu jsou zahrnuty čtyři tematické okruhy:

- číslo a proměnná;
- závislosti, vztahy a práce s daty;

- geometrie v rovině a prostoru;
- nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Vzdělávací oblast „Matematika a její aplikace“ velmi těsně souvisí s oblastí „Člověk a příroda“ (zde spadají předměty fyzika, chemie, přírodopis, zeměpis) a zároveň pro tuto oblast poskytuje mocný prostředek k jejímu využití. Učitelé si rozvrhují témata do jednotlivých ročníků podle svých zkušeností a představ, proto se nedá přesně určit, do kterého ročníku spadá učivo lineární rovnice, lineární funkce a soustavy lineárních rovnic. Obvykle se učivo lineární rovnice objevuje v 8. ročníku základních škol a soustavy lineárních rovnic v 9. ročníku.

1.2 Školní vzdělávací program

Školní vzdělávací program je pedagogický dokument, který si vytváří každá základní škola sama tak, aby realizovala požadavky rámcového vzdělávacího programu. Legislativně je zakotven ve školském zákoně č. 561/2004 Sb.

Učitelé v něm mohou profilovat svoji školu a tím ji odlišit od jiných škol. Formulují v něm vlastní představy o podobě vzdělávání na své škole. Mají možnost odbourat zbytečné duplicity v obsahu učiva a lépe spolupracovat při mezioborovém vzdělávání. (Wikipedie.cz, 2010)

Školní vzdělávací program obsahuje závazné části, vycházející z rámcového vzdělávacího programu. Zahrnuje charakteristiku školy, charakteristiku ŠVP, učební plán, učební osnovy, hodnocení žáků a autoevaluaci školy.

Smyslem tohoto programu je vybavit žáky nejen vědomostmi, ale především vyvolat a rozvíjet schopnosti a dovednosti, které jim pomohou uplatnit se ve společnosti - tj. umění učit se, řešit problémy, komunikovat s ostatními, rozvíjet sociální vztahy.

Pro jednotlivé vzdělávací oblasti stanovuje očekávané výstupy. Výstupy si každá škola vytváří sama. Základní škola Valeč formulovala očekávané výstupy následovně (ZŠ Valeč, 2009) (viz tab. č. 1):

Tab. č. 1: Očekávané výstupy

Očekávané výstupy	**Učivo předmětu**	**Přesahy a vazby na další předměty, aplikace**
Žák: • chápe vztah a zápis rovnosti, vlastnosti rovnosti a význam zkoušky. • chápe pojem kořen rovnice. • využívá ekvivalentní úpravy při řešení	**Lineární rovnice** Rovnost, rovnice Ekvivalentní úpravy	Práce ve správném logickém sledu, kritické myšlení. Používání rovnic pro řešení úloh, tvorba úloh řešitelných pomocí rovnic (např. úlohy směsích, úlohy o pohybu, aj.)

rovnic. • vyjadřuje neznámou ze vzorce.		Využívání vzorců známých z fyziky, geometrie, chemie.
Žák: • řeší soustavu rovnic (metodou sčítací a dosazovací) a chápe, že řešením je uspořádaná dvojice čísel. • umí převést řešení soustavy rovnic na řešení jedné lineární rovnice. • ve vhodných případech užívá grafické řešení slovních úloh. • převede rovnici s neznámou ve jmenovateli na rovnici lineární.	**Soustavy lineárních rovnic** Rovnice s neznámou ve jmenovateli.	Zdůrazňování volby optimální metody řešení. Fyzika – řešení úloh. Práce ve správném logickém sledu.
Žák: • používá soustavu souřadnic k řešení úloh. • chápe funkce jako závislost proměnných a chápe vztah proměnné, nezávisle proměnné a závislé proměnné. • rozpozná, zda závislost mezi dvěma veličinami je funkcí. • určí definiční obor funkce. • pro daný prvek definičního oboru	**Funkce** Soustava souřadnic. Funkce jako závislost Vlastnosti funkce	Rozvoj kauzálního myšlení, postupná schopnost zobecňování a abstrakce. Vytváření komplexnějšího pohledu na matematické, společenské a kulturní jevy. Vyhledávání informací, čtení z grafů a pochopení grafických záznamů. Informatika a výpočetní technika – aktivní využití programu Excel a Malování. Aplikační úlohy z praxe – porozumění vývojovým

určí hodnotu funkce. • určuje vlastnosti funkce (rostoucí, klesající, konstantní). • rozpozná lineární funkci (přímou úměrnost) a používá ji pro řešení úloh.		křivkám: růst a pokles (cen, zisků, teploty, porodnosti a dalších socioekonomických ukazatelů) Fyzika – síly, skládání sil.

2 Označení

Tab. č. 2: Přehled značek

Značka	Význam
$\in$	je prvkem, patří do
$\notin$	není prvkem
$\subset$	inkluze, vlastní podmnožina
$\cup$	sjednocení
$\cap$	průnik
$\Rightarrow$	implikace výroků
$\Leftrightarrow$	ekvivalence výroků
$\wedge$	konjunkce výroků
$\vee$	disjunkce výroků
$\forall$	velký (obecný) kvantifikátor
$\exists$	malý (existenční) kvantifikátor
$[a_1, a_2]$	uspořádaná dvojice
(u_1, u_2)	vektor o souřadnicích u_1, u_2
V_n	vektorový prostor
$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}$	vektory
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$	transponovaný vektor
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	matice
$[m \times n]$	matice typu $[m \times n]$, matice má m řádků a n sloupců
a_{ij}	prvek matice
$\mathbf{A}_r$	rozšířená matice
$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$	transponovaná matice
$\mathbf{A}^{-1}$	inverzní matice
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$h(\mathbf{A})$	hodnost matice **A**
$h(\mathbf{A}_r)$	hodnost rozšířené matice $\mathbf{A}_r$
$det\mathbf{A}$	determinant matice **A**
$\mathbf{A}_{ij}$	algebraický doplněk
$\mathbf{A}_{ij}^{*}$	subdeterminant

3 Funkce

Ve vzdělávacím programu základních škol jsou funkce zařazeny do sedmého a devátého ročníku.

V tematickém okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce. (VÚP Praha, 2007, s. 29)

Žáci se setkávají s pojmem funkce, navazují na znalosti získané v nižším ročníku, zpravidla šestém, kde byli seznámeni s pojmem přímka a číselná osa. Jejich vědomosti se rozšiřují a oni se učí pracovat s grafickým vyjádřením přímky v rovině. Uvědomují si vzájemnou polohu dvou přímek v rovině. Seznamují se s pojmem graf funkce, definiční obor funkce, obor hodnot, vlastnosti funkce, pravoúhlá soustava souřadnic, souřadnice bodů v rovině, lineární funkce.

Při práci s funkcemi žák (ZŠ Valeč, 2009):

- matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů;
    - rozezná funkční vztah od jiných vztahů, vysvětlí pojem lineární funkce;
- vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem;
    - Rozezná, zda závislost daná grafem nebo tabulkou je funkcí. Určí definiční obor a obor hodnot funkce dané tabulkou či grafem. Sestrojí graf funkce dané tabulkou. Použije funkci při řešení úloh z praxe;
- znázorní body a najde souřadnice bodů v pravoúhlé soustavě souřadnic;
- rozumí definici lineární funkce;
- sestaví tabulku a zakreslí graf lineární funkce;
- určí definiční obor funkce, obor hodnot funkce;
- rozlišuje funkci rostoucí, klesající, nerostoucí, zda má funkce maximum či minimum;
- řeší soustavy lineárních rovnic grafickou metodou;
- při grafickém řešení soustavy lineárních rovnic určí vzájemnou polohu dvou přímek v rovině a tak i řešení soustavy;
- určí průsečík dvou přímek a zaznamená souřadnice tohoto průsečíku;
- zdokonaluje svoji orientaci v rovině pomocí pravoúhlé soustavy souřadnic;
- chápe vztah mezi lineární funkcí a lineární rovnici. Lineární rovnice umí převést na tvar lineární funkce a vyřešit ji graficky;
- volí správný postup k vyřešení problému;
- vyhodnocuje správnost výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému.

3.1 Reálná funkce jedné reálné proměnné

Definice 1 (funkce):

Funkcí rozumíme pravidlo, pomocí kterého je každému reálnému číslu x z množiny A přiřazeno právě jedno reálné číslo y. Množinu A nazýváme definičním oborem funkce. (Odvárko, Řepová, 1996)

Veličinu x nazýváme nezávisle proměnnou (neboli vzorem), veličinu y závisle proměnnou (neboli obrazem).

Definice 2 (reálná funkce jedné reálné proměnné):

Nechť A, B jsou neprázdné množiny reálných čísel (A $\subset$ R, B = R). Přiřadíme-li každému číslu $x \in$ A právě jedno $y \in$ B, pak toto jednoznačné přiřazení (zobrazení) reálných čísel nazýváme reálná funkce reálné proměnné x. Funkci budeme značit f. (Polák, 2008)

Proměnnou x nazýváme funkční proměnnou nebo též argumentem funkce f, jednotlivým číslům množiny A říkáme hodnoty proměnné (argumentu). Množinu A nazýváme definičním oborem funkce f, který obvykle značíme D(f). Číslo y přirazené číslu x nazýváme funkční hodnotou či hodnotou funkce f v bodě x a značíme $f(x)$. Píšeme pak $y = f(x)$ nebo $x \rightarrow f(x)$ nebo $x \rightarrow y$. Písmeno f zde značí funkční předpis. Množinu všech hodnot dané funkce f označujeme H(f) a nazýváme oborem hodnot funkce f. Jedná se o obraz množiny D(f), vytvořený předpisem f. (Polák, 2008; Rektorys, 2007)

Funkci f symbolicky zapisujeme:

$$f\colon \mathrm{A} \rightarrow R,\ \mathrm{D}(f) = \mathrm{A},$$
$$f\colon y = f(x),\ x \in \mathrm{D}(f),\ \text{neboli}\ f\colon x \mapsto f(x),\ x \in \mathrm{D}(f).$$

3.2 Vlastnosti funkcí

Graf funkce nám poskytuje názornou představu o vlastnostech funkce f.

Definice 3 (graf funkce):

Grafem funkce f rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel ve tvaru $[x, f(x)]$, kde $x \in$ D(f).

Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel znázorňujeme v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y tak, že hodnotu nezávisle proměnné nanášíme na vodorovnou osu x, hodnotu závisle proměnné na svislou osu y a v rovině x, y pak vyneseme body o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in$ D(f).

Definice 4 (funkce rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající):

Nechť f je funkce jedné reálné proměnné, M $\subset$ D(f). Řekneme, že:

1.) funkce f se nazývá funkce rostoucí v množině M, jestliže $\forall_{x_1 \in M} \forall_{x_2 \in M}$ platí:

Je-li $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2.) funkce f se nazývá funkce klesající v množině M, jestliže $\underset{x_1 \in M}{\forall} \underset{x_2 \in M}{\forall}$ platí:

Je-li $x_1 > x_2, \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3.) funkce f se nazývá funkce neklesající v množině M, jestliže $\underset{x_1 \in M}{\forall} \underset{x_2 \in M}{\forall}$ platí:

Je-li $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

4.) funkce f se nazývá funkce nerostoucí v množině M, jestliže $\underset{x_1 \in M}{\forall} \underset{x_2 \in M}{\forall}$ platí:

Je-li $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. (Klůfa, Coufal, 2003)

Definice 5 (prostá funkce):

Funkce f s definičním oborem D(f) je prostá funkce, právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in$ D(f), $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Polák, 2006)

Je-li funkce rostoucí anebo klesající, pak je prostá.

Definice 6 (omezená zdola, shora):

Říkáme, že funkce f je na svém D(f) omezená zdola, jestliže existuje reálné číslo d takové, že platí: $\forall x \in$ D(f) je $f(x) \geq d$.
Říkáme, že funkce f je na D(f) omezená shora, jestliže existuje takové $h \in R$, že $f(x) \leq h$ pro $\forall x \in$ D(f).
Funkci, která je současně omezená shora i zdola, nazýváme omezenou.
(Malec, 2007)

Definice 7 (maximum, minimum):

Nechť f je daná funkce, M podmnožina jejího definičního oboru D(f); a $\in M$, b $\in M$.

Říkáme, že funkce f má v bodě a minimum (nejmenší hodnotu) na množině M, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq f(a)$.

Zapisujeme:

$$f(a) = \min_{x \in M} f(x).$$

Říkáme, že funkce f má v bodě b maximum (největší hodnotu) na množině M, právě když pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq f(b)$.

Zapisujeme:

$f(b) = \max_{x \in M} f(x)$. (Polák, 2008, s. 137)

3.3 Lineární funkce

Definice 8 (lineární funkce):

Lineární funkcí rozumíme každou funkci f: $y = ax + b$, kde $a, b \in R$, D(f) = R, $a \neq 0, x \in R$. (Odvárko, 2000)

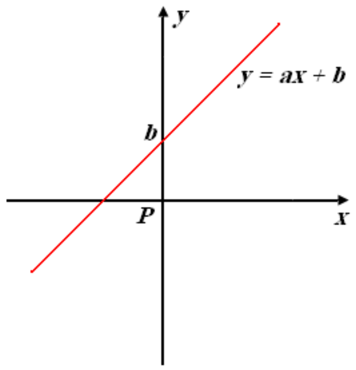
Speciálně:

1. Je-li $a \neq 0, b = 0$, pak lineární funkci $f: y = ax$, kde $a \in R - \{0\}, D(f) = R$, nazýváme **přímou úměrností**.
2. Je-li $a = 0$, dostáváme funkci tvaru $f: y = b$, kde $b \in R, D(f) = R$, zvanou **konstantní funkce** (konstanta).

Grafem každé lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou x. Každá přímka je určena dvěma svými různými body.

Vlastnosti lineárních funkcí f: $y = ax + b$

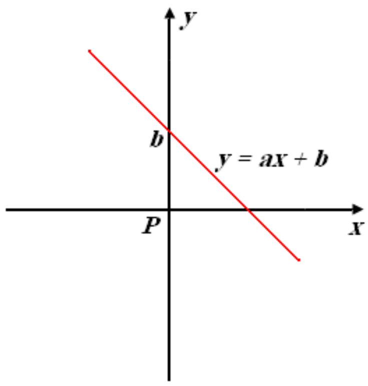
a.) Je-li $a > 0$, pak



Obr. č. 1: Funkce rostoucí

D(f) = R, H(f) = $\{b\}$. Funkce není shora ani zdola omezená. Je rostoucí, a tedy i prostá. Nemá maximum ani minimum.

b.) Je-li $a < 0$ pak



Obr. č. 2: Funkce klesající

D(f) = R, H(f) = R. Tato funkce není ani shora, ani zdola omezená. Je klesající, a tedy prostá. Nemá maximum ani minimum.

4 Rovnice

V tematickém okruhu Čísla a početní operace na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh Číslo a proměnná, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací. (VÚP Praha, 2007, s. 29)

Na základní škole se žáci setkávají s rovnicemi už na prvním stupni, kde určují, zda jsou si dvě hodnoty rovny, nebo nikoliv. Na druhém stupni, zpravidla v šestém ročníku, se prostřednictvím vzorečků učí dosazovat zadané hodnoty a následně vypočítat neznámou. Z algebraických rovnic probírají především rovnice 1. stupně, zvané lineární rovnice. Žáci se zde také setkávají s rovnicemi 2. stupně, tedy kvadratickými rovnicemi a s rovnicemi, kdy se neznámá vyskytuje ve jmenovateli, a pomocí základních ekvivalentních úprav je převedou na tvary lineárních rovnic, které spočítají.

Jsou seznámeni s lineární rovnicí o jedné neznámé, lineární rovnicí o dvou neznámých a soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Učí se jednotlivé rovnice řešit pomocí ekvivalentních úprav. Soustavu lineárních rovnic řeší pomocí početních metod a to metodou dosazovací, sčítací a porovnávací. Žáci si uvědomují vztah mezi lineární rovnicí a lineární funkcí. Soustavy lineárních rovnic řeší také graficky. Zde je kladen velký důraz na přesnost v rýsování. V rovině znají vzájemnou polohu dvou přímek.

Při řešení složitějších rovnic jsou žáci obeznámeni s kroky, které musí dodržet, aby rovnice byla vyřešena správně:

1. krok: <u>Odstranění závorek</u>
   Pokud rovnice obsahuje závorky, dochází k jejich odstranění výpočtem či roznásobením.
2. krok: <u>Odstranění zlomků</u>
   Pokud rovnice obsahuje zlomky, dochází k jejich odstranění, a to vynásobením rovnice společným jmenovatelem zlomků.
3. krok: <u>Převedení všech členů s neznámou a bez neznámé</u>
   Dochází k převodu všech členů s neznámou na jednu stranu rovnice a členů bez neznámé na druhou stranu.
4. krok: <u>Úprava obou stran rovnice a osamostatnění neznámé</u>
   Dochází k úpravě levé a pravé strany rovnice. Jsou zde sečteny a odečteny členy s neznámou a členy bez neznámé.
5. krok: <u>Ověření správnosti řešení (zkouška)</u>
   Důležité je provádět zkoušku jako úpravu rovnosti dvou číselných výrazů.

<u>Prostřednictvím lineárních rovnic se žák učí: (ZŠ Valeč, 2009)</u>

- matematizovat jednoduché reálné situace s využitím proměnných a určit hodnotu proměnné;
- formulovat a řešit reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav:

- žák řeší za pomoci ekvivalentních úprav rovnice se zlomky a se závorkami;
    - řeší soustavy rovnic o dvou neznámých;
    - řeší slovní úlohy z praxe, kde provede rozbor slovní úlohy, jejich řešení a ověří si reálnost získaného výsledku;
  - analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.

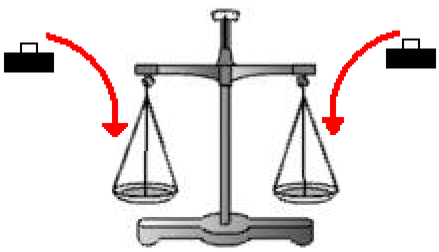
Při řešení lineárních rovnic žák (ZŠ Valeč, 2009):

- rozumí pojmům rovnost dvou výrazů, proměnná, neznámá, řešení rovnice.
- využívá ekvivalentních úprav a matematicky správně a účelně zapisuje postup řešení;
- provádí zkoušku řešení dosazením do rovnice;
- rozvíjí své kombinatorické a logické myšlení, kritické usuzování, srozumitelnou a věcnou argumentaci prostřednictvím matematických problémů;
- rozvíjí zkušenosti s matematickým modelováním;
- provádí rozbor problémů a plánu řešení;
- volí správný postup k vyřešení problému;
- vyhodnocuje správnost výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému;
- volí vlastní postupy, prostřednictvím kterých dojde ke správnému řešení;
- samostatně řeší problémy a volí vhodné způsoby řešení;
- přezkoumává řešení a osvědčené postupy aplikuje při řešení obdobných nebo nových problémových situací;

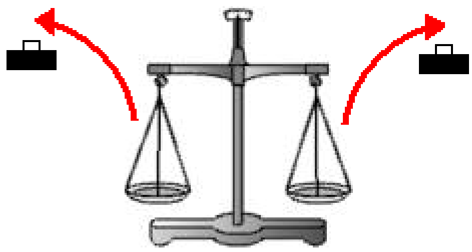
4.1 Metodika zavedení rovnic

Nejčastěji rovnice přirovnáváme k rovnováze na rovnoramenných vahách. Každá miska vah odpovídá jedné straně rovnice. Podobné úpravy, které můžeme provádět při neporušené rovnováze na vahách, můžeme provádět také v rovnici. (Ženatá, 2008)

1. Rovnováhu neporušíme, jestliže přidáme na obě misky vah stejné závaží (viz obr. č. 3), nebo když z obou misek odebereme stejné závaží (viz obr. č. 4).



Obr. č. 3: Rovnováha



Obr. č. 4: Rovnováha

2. Rovnováhu neporušíme, zvětšíme-li váhu předmětů na obou miskách dvakrát, třikrát, čtyřikrát atd.

Zavedení rovnic:

Nechť f a g jsou dvě funkce jedné proměnné x. Hledáme-li takové hodnoty proměnné x, pro něž je splněna rovnost

$$f(x) = g(x),$$

pak říkáme, že řešíme rovnici o jedné neznámé. Funkci $f(x)$ nazýváme levou stranou rovnice, funkci $g(x)$ pravou stranou rovnice. Proměnnou x nazýváme neznámou. Hodnoty neznámé x_k , pro které je rovnice splněna, tj. platí rovnost $f(x_k) = g(x_k)$, nazýváme kořeny (řešení) rovnice. Číselný obor M, ve kterém hledáme kořeny (řešení) rovnice, nazýváme oborem řešení rovnice. Množinu však takových $x \in D(f) \cap D(g)$, pro které má daná rovnice smysl, nazýváme definičním oborem rovnice a označujeme ho D. Určit množinu D, znamená stanovit podmínky, pro něž má rovnice smysl.

4.2 Postup při řešení rovnic

Postup při řešení rovnic se skládá ze tří základních částí, které nazýváme:

1. *rozbor,*
2. *nalezení řešení,*
3. *zkouška.*

1. V první části předpokládáme, že daná rovnice má alespoň jeden kořen. Rovnici postupně upravujeme, dokud nezískáme rovnici, jejíž kořeny známe nebo je snadno dovedeme určit. Použité úpravy rovnice musí přitom splňovat tu vlastnost, že každý kořen dané rovnice je také kořenem rovnice získané její úpravou. Tyto úpravy se nazývají důsledkové (implikační) úpravy. Mezi nejdůležitější důsledkové úpravy patří tzv. ekvivalentní úpravy.
   Ekvivalentní úprava rovnice je úprava, při které dostaneme rovnici ekvivalentní s rovnicí původní. Dvě rovnice se nazývají ekvivalentní, mají-li přesně tytéž kořeny. To znamená, že každý kořen první rovnice je kořenem rovnice druhé a naopak. (Jarník, Šišler, 1969)
2. V této části určíme množinu M´ všech kořenů rovnice získané v první fázi důsledkovými úpravami. Množinu M´ $\subset$M budou obsahovat všechna možná řešení dané rovnice. (Pokud však použité důsledkové úpravy nejsou ekvivalentní, pak některé prvky M´nemusejí být kořeny dané rovnice).
3. V poslední části budeme provádět zkoušku. Zkoušku provádíme tehdy, použili jsme důsledkové úpravy. Nejprve zjistíme, které prvky x_k množiny M´ jsou kořeny dané rovnice. Postupně také dosadíme každé z čísel $x_k \in$ M´do levé strany $f(x)$ dané rovnice, čímž dostaneme nějaké číslo $f(x_k)$, a do pravé strany $g(x)$ dané rovnice, tím dostaneme číslo $g(x_k)$. Je-li $f(x_k) = g(x_k)$, pak je dosazované číslo x_k kořenem dané rovnice.

Výsledkem zkoušky je získání množiny K všech kořenů rovnice, kde $K \subset M' \subset M$.

Přehled ekvivalentních úprav:

Tab. č. 3: Přehled ekvivalentních úprav

	Popis ekvivalentní úpravy
1.	**Záměna stran** rovnice: $$f(x)=g(x) \Leftrightarrow g(x)=f(x)$$
2.	**Přičtení nebo odečtení funkce** $h(x)$, která je definována v množině D, k oběma stranám rovnice: $$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\pm h(x)=g(x)\pm h(x).$$
3.	**Vynásobení obou stran rovnice** funkcí $k(x)$, která je definována a různá od nuly v množině D: $$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot k(x)=g(x)\cdot k(x).$$
Následující dvě úpravy nejsou obecně ekvivalentní. Při jejich použití je třeba vždy ověřit, zda nalezená řešení jsou také ta, která hledáme.	
4.	**Umocnění** obou stran rovnice stejným přirozeným mocnitelem: $$f(x)=g(x) \Rightarrow (f(x))^n=(g(x))^n, n \in N.$$
5.	**Odmocnění** obou stran rovnice stejným přirozeným odmocnitelem $n \in N$: a) Je-li n sudé, pak musí platit pro všechna $x \in D \Rightarrow f(x) \geq 0 \wedge g(x) \geq 0$; b) Je-li n liché, pak pro libovolné funkce $f(x)$, $g(x)$ je: $$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{g(x)}.$$
Poslední dvě úpravy se týkají logaritmování.	
6.	**Logaritmování** obou stran rovnice: platí-li pro $\forall x \in D \Rightarrow f(x)>0 \wedge g(x)>0,$ potom $$f(x)=g(x) \Leftrightarrow \log_a f(x)=\log_a g(x), a>0, a \neq 1.$$
7.	**Odlogaritmování** obou stran rovnice: $$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x), a>0, a \neq 1.$$

4.3 Algebraické rovnice

Definice 9 (algebraická rovnice)

Algebraická rovnice n-tého stupně s neznámou $x \in R$ je každá rovnice tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \text{ kde } a_n \neq 0, n \in N.$$

Čísla $a_0, a_1, ..., a_n, n \in N$ jsou tzv. koeficienty algebraické rovnice, číslo n je tzv. stupeň rovnice. (Malec, 2007)

Levou stranou této algebraické rovnice je tedy mnohočlen n-tého stupně s reálnými koeficienty a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0, které označujeme $P_n(x)$. Členy mnohočlenu $P_n(x)$ nazýváme členy algebraické rovnice. Je-li $a_n = 1$, pak je algebraická rovnice v normovaném tvaru.

4.4 Lineární rovnice o jedné neznámé

Definice 10 (lineární rovnice o jedné neznámé)

Je-li stupeň algebraické rovnice $n = 1$, dostáváme rovnici ve tvaru $ax + b = 0$, kde $a, b \in R$, $a \neq 0$. Tuto rovnici nazýváme lineární rovnicí o jedné neznámé x. Každá lineární rovnice $ax + b = 0$, která obsahuje jednu neznámou, má vždy právě jeden kořen $x = -\frac{b}{a}$. (Janurová, Janura, 1999)

Právě jeden kořen mají i rovnice, které ekvivalentními úpravami změníme na lineární rovnice o jedné neznámé (př. rovnice s neznámou ve jmenovateli).

Lineární rovnice řešíme pomocí **ekvivalentních úprav**. Ekvivalentní úpravy rovnice jsou takové, po jejichž provedení získáme rovnici, která má stejnou množinu všech řešení jako rovnice původní.

4.5 Lineární rovnice o dvou neznámých

Definice 11 (lineární rovnice o dvou neznámých)

Rovnici ve tvaru $ax + by + c = 0$, kde $a, b, c \in R$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, nazýváme lineární rovnicí o dvou neznámých x, y.
Čísla a, b nazýváme koeficienty neznámých, číslo c absolutním členem. (Mikulčák, 1993)

Řešením lineární rovnice o dvou neznámých jsou uspořádané dvojice čísel $[x, y]$.

Je důležité si uvědomit, že nekonečně mnoho dvojic kořenů neznamená, že každá dvojice čísel rovnici vyhovuje. Rovnici vyhovují jen ty dvojice, pro které je po dosazení $L = P$.

4.6 Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Definice 12 (soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých)

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých *x*, *y* nazýváme soustavu ve tvaru

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$

kde $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$ jsou daná reálná čísla.

Řešením soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je množina uspořádaných dvojic [*x*, *y*], jejichž souřadnice vyhovují oběma rovnicím.

Pro řešení této soustavy existují různé metody, jejichž použití záleží na tvaru jednotlivých rovnic. Mezi základní metody řešení soustavy, které jsou na základních školách vyučovány, jsou eliminační metody. Podstatou je postupná eliminace neznámých z rovnic soustavy.

Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:

Tab. č. 4: Přehled ekvivalentních úprav

Označení úpravy	**Popis ekvivalentní úpravy soustavy rovnic**
Ekvivalentní úprava č. 1	Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní. Tuto rovnici získáme dvěma ekvivalentními úpravami: 1. K oběma stranám rovnice přičteme stejné číslo nebo výraz s neznámými, který je definován v celém oboru, v němž se rovnice řeší. 2. Obě strany rovnice násobíme stejným číslem různým od nuly nebo výrazem s neznámými, který je definován a je nenulový v celém oboru, v němž se rovnice řeší.
Ekvivalentní úprava č. 2	Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.
Ekvivalentní úprava č. 3	Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

4.6.1 Početní řešení

Metody, které používáme pro řešení soustavy lineárních rovnic, se odlišují podle způsobu eliminace neznámých. Na základní škole využíváme následujících metody:

1. <u>Metoda sčítací</u>: Při metodě sčítací využíváme porovnání součtu výrazů na levých a pravých stranách obou rovnic za účelem vyrušení jedné neznámé. Vytvoříme takové násobky obou rovnic, abychom po sečtení jejich levých a pravých stran získali novou rovnici, která obsahuje pouze jednu neznámou.
   Tuto metodu si ukážeme na následujícím příkladu:

Př.: Vyřešte sčítací metodou soustavu:

$$-x + 5y = -12$$
$$-x + 3y = -4$$

Druhou rovnici násobíme číslem –1, poté dostaneme ekvivalentní rovnici:

$$x - 3y = 4$$

Získanou ekvivalentní rovnici sečteme s první rovnicí soustavy:

$$-x + x + 5y - 3y = -12 + 4$$

Tím vyloučíme neznámou *x* a pro neznámou *y* dostaneme rovnici:

$$\begin{aligned} 2y &= -8 \quad /:2 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Ekvivalentní úpravou jsme zjistili hodnotu y. Tuto neznámou dosadíme do první rovnice a získáme neznámou *x*:

$$\begin{aligned} -x + 5y &= -12 \\ x - 5 \cdot (-4) &= -12 \quad /\ \textit{násobíme} \\ x + 20 &= -12 \quad /-20 \\ x &= -32 \end{aligned}$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-32, 4]$.

2. <u>Metoda dosazovací</u> (substituční): Při metodě dosazovací vyjádříme z libovolné rovnice jednu neznámou a tuto závislost dosadíme do druhé rovnice.
   Tuto metodu si ukážeme na následujícím příkladu:

Př.: Vyřešte dosazovací metodou tuto soustavu: $\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ x - 2y &= 1 \end{aligned}$

Z druhé rovnice vyjádříme *x*:

$$x = 1 + 2y$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$2x + 3y = 9$$
$$2 \cdot (1 + 2y) + 3y = 9$$
$$2 + 4y + 3y = 9$$
$$2 + 7y = 9$$
$$7y = 9 - 2$$
$$7y = 7$$
$$y = 1$$

Tuto získanou neznámou dosadíme do vyjádřeného *x*:

$$x = 1 + 2y$$
$$x = 1 + 2 \cdot 1$$
$$x = 3$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [3,1]$.

3. Metoda srovnávací (porovnání stran) – Při srovnávací metodě vyjádříme z obou stran rovnice tutéž neznámou v závislosti na druhé a porovnáme strany obou rovnic.
Tuto metodu si ukážeme na následujícím příkladu:

Př.: Vyřešte metodou porovnání stran tuto soustavu: $-4x + 2y = 8$, $3x - y = 2$

Z první i druhé rovnice vyjádříme *y* v závislosti na *x*:

$$-4x + 2y = 8 \qquad\qquad 3x - y = 2$$
$$2y = 8 + 4x \quad / \div 2 \qquad\qquad -y = 2 - 3x$$
$$y = 4 + 2x \qquad\qquad y = -2 + 3x$$

Porovnáme pravé strany obou rovnic:

$$4 + 2x = -2 + 3x$$
$$2x - 3x = -2 - 4$$
$$-x = -6$$
$$x = 6$$

Získanou neznámou dosadíme do jedné z rovnic:

$$y = 4 + 2x$$
$$y = 4 + 2 \cdot 6$$
$$y = 4 + 12$$
$$y = 16$$

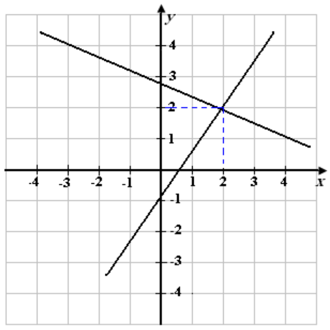
Řešením soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [6,16]$.

4.6.2 Grafické řešení

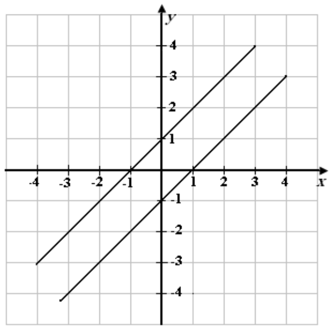
Soustavy rovnic o dvou neznámých $x,\ y \in R$ můžeme také řešit graficky. Každá rovnice popisuje přímku v rovině. Řešit soustavu z geometrického hlediska tedy znamená najít průsečík dvou přímek v rovině. Při řešení může nastat jedna ze tří možností. Soustava může mít:

a) jedno řešení (jedná se o případ, kdy přímky jsou různoběžné);
(viz obr. č. 5)
b) žádné řešení (jedná se o případ, kdy přímky jsou rovnoběžné);
(viz obr. č. 6)

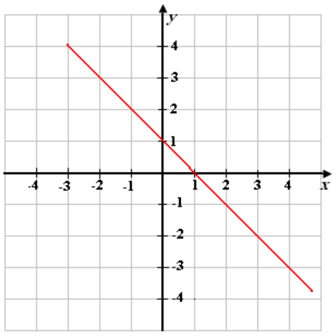
c) nekonečně mnoho řešení (jedná se o případ, kdy přímky jsou totožné, obě rovnice tedy představují jednu a tutéž přímku).
(viz obr. č. 7)



Obr. č. 5: Jedno řešení



Obr. č. 6: Žádné řešení



Obr. č. 7: Nekonečně mnoho řešení

Na příkladu si ukážeme, jak řešíme soustavu lineárních rovnic:

Př.: Řešte graficky soustavu lineárních rovnic:

$$x - y = 1$$
$$2x + y = 5$$

Z obou rovnic si vyjádříme *y*:

$$x - y = 1 \qquad\qquad 2x + y = 5$$
$$-y = 1 - x \qquad\qquad y = 5 - 2x$$
$$y = x - 1$$

Upravené rovnice převedeme na tvary lineárních funkcí:

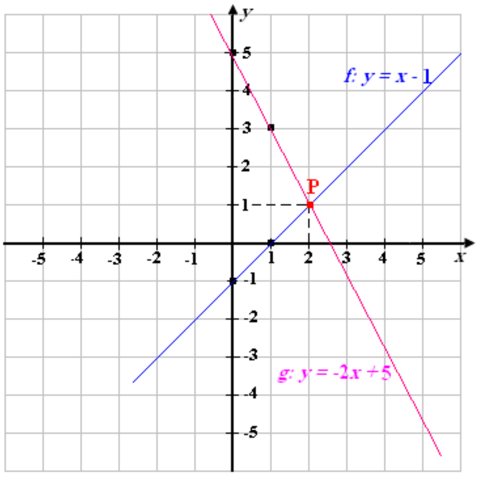
$$f: y = x - 1$$
$$g: y = -2x + 5$$

Sestavíme tabulky:

x	0	1
$y = x - 1$	–1	0

x	0	1
$y = -2x + 5$	5	3

Sestrojíme grafy obou funkcí:



Obr. č. 8: Graf funkce

Grafickým řešením je uspořádaná dvojice [2, 1].

5 Vektory

V této kapitole se budeme věnovat pojmu vektor, vektorový prostor a vlastnosti vektorových prostorů. Tato kapitola spadá do vyšší matematiky a není probírána na základních školách.

Definice 13 (vektor, vektorový prostor):

Uspořádanou n-tici (reálných nebo komplexních) čísel ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) nazveme n-rozměrným vektorem a označíme $\boldsymbol{a}$ *(nebo* $\vec{a}$*); čísla* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nazveme souřadnicemi vektoru* $\boldsymbol{a}$ *(*a_i *je jeho i-tá souřadnice).*
Píšeme $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Množinu všech n-rozměrných vektorů, splňujících zákony (1 až 4):

1. $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ *zákon komutativní*
2. $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ *zákon asociativní*
3. $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, λ,μ *jsou libovolná čísla*
4. $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$, λ *jsou libovolná čísla*

zákony distributivní (3., 4.)

nazýváme n-rozměrným vektorovým prostorem a označujeme ji V_n. *Budou-li mít vektory jen reálné souřadnice, hovoříme o reálném vektorovém prostoru.*
(Chudý, 1974, s. 12 – 13)

5.1 Vlastnosti vektorů

Definice 14 (směrový vektor):

Nechť máme vektor $\boldsymbol{u}$ a body A, B. Vektor $\boldsymbol{u}$ = B – A nazýváme směrovým vektorem přímky AB. (Kočandrle, Boček, 2008)

Věta1 (souřadnice vektoru)

Pokud je vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou AB, pak čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$ (ve dvojrozměrném prostoru) nazýváme souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{u}$ a zapisujeme je $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$.
Analogicky budeme definovat souřadnice vektoru v trojrozměrném prostoru. Pokud je vektor $\boldsymbol{u}$ určen orientovanou úsečkou AB, pak čísla $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$ nazýváme souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{u}$ a zapisujeme je $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Je-li přímka p určena bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$, pak píšeme p (A, u).

Poznámka: Orientovaná úsečka je úsečka, jejíž krajní body mají určené pořadí, jeden je počáteční a druhý je koncový.

Definice 15 (nulový vektor):

Nulovým vektorem $\boldsymbol{0}$ rozumíme takový vektor, který má všechny souřadnice rovny nule, tj. $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Definice 16 (lineárně závislé, lineárně nezávislé vektory):

Vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ z V_n jsou lineárně závislé, existují-li taková čísla (reálná nebo komplexní) λ_1, λ_2, …, λ_k, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, že
$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$.
Pokud vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ z V_n nejsou lineárně závislé, jsou lineárně nezávislé.

Definice 17 (lineární kombinace vektorů):

Říkáme, že vektor $\boldsymbol{a} \in V_n$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ z V_n, existují-li taková čísla (reálná nebo komplexní) $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, že
$\boldsymbol{a} = \mu_1\boldsymbol{a}_1 + \mu_2\boldsymbol{a}_2 + \mu_k\boldsymbol{a}_k$.

Vektory $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_k$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li aspoň jeden z vektorů lineární kombinací ostatních. (Rektorys, 2007)

Definice 18 (hodnost vektorů):

Říkáme, že soustava $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$ vektorů z V_n má hodnost h, jestliže mezi vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ existuje h lineárně nezávislých vektorů, ale každých h + 1 vektorů z $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, jsou již vektory lineárně závislé. (h je pak maximální počet lineárně nezávislých vektorů dané soustavy.) (Rektorys, 2007, s. 24)

Definice 19 (skalární součin vektorů)

Skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rozumíme číslo $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$.

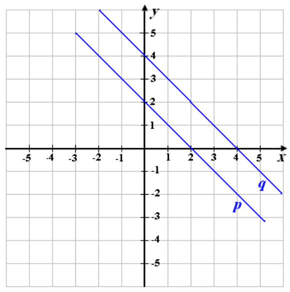
6 Přímka v rovině

V předcházející kapitole jsme se seznámili s pojmem vektor a vektorový prostor. Nyní se budeme zabývat vzájemnou polohou dvou přímek v souvislosti s jejím parametrickým a obecným vyjádřením.

6.1 Vzájemná poloha dvou přímek v rovině

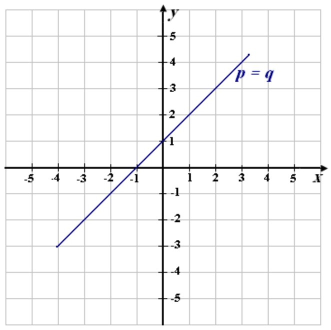
Dvě přímky v rovině mohou být:

1. <u>rovnoběžné různé</u> – přímky nemají žádný společný bod:



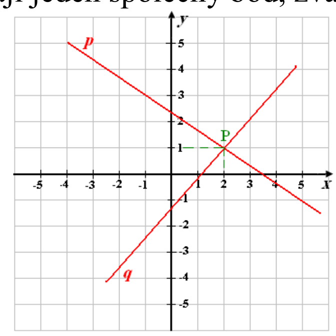
Obr. č. 9: Rovnoběžné přímky

2. <u>totožné</u> – přímky mají všechny svoje body společné (těchto bodů je nekonečně mnoho:



Obr. č. 10: Totožné přímky

3. <u>různoběžné</u> – přímky mají jeden společný bod, zvaný průsečík P:



Obr. č. 11: Různoběžné přímky

6.2 Parametrické a obecné vyjádření roviny

Definice 20 (parametrická rovnice roviny)

Každý bod X roviny ABC můžeme psát ve tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}; \quad t, s \in R,$$

kde $\boldsymbol{u}$ = B – A, $\boldsymbol{v}$ = C – A. Každý bod X zapsaný v tomto tvaru je bod roviny ABC.

Rovnici

$$X = A + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}; \quad t, s \in \mathrm{R},$$

nazýváme parametrickou rovnicí roviny ABC, kde B = A + $\boldsymbol{u}$, C = A + $\boldsymbol{v}$. (Kočandrle, Boček, 1999)

Body X, A a vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ můžeme vyjádřit pomocí souřadnic. Pro body A = [a_1, a_2, a_3], X = [x, y, z] a vektory $\boldsymbol{u}$ = (u_1, u_2, u_3), $\boldsymbol{v}$ = (v_1, v_2, v_3) dostaneme parametrické vyjádření roviny v souřadnicích:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &= a_2 + tu_2 + sv_2; \quad t, s \in R \\ z &= a_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

Rovnice vyjadřujeme často obecnou rovnicí než rovnicí parametrickou. Rovinu σ určíme bodem A a vektorem n, který je k ní kolmý. Tento vektor nazýváme normálovým vektorem roviny σ.

Definice 21 (obecná rovnice roviny):

Rovnici ve tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde a, b, c, d jsou reálná čísla a alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, nazýváme obecnou rovnicí roviny.

6.3 Parametrické a obecné vyjádření přímky

PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ PŘÍMKY

Definice 22 (parametrická rovnice přímky):

Parametrickou rovnicí rozumíme rovnici ve tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u}, \ t \in R.$$

Někdy ji též nazýváme parametrickým vyjádřením přímky určené bodem A a vektorem $\boldsymbol{u}$. Proměnnou t nazýváme parametrem.

Body X, A a vektor $\boldsymbol{u}$, můžeme vyjádřit pomocí souřadnic. Pro body A[a_1, a_2], X[x, y] a vektor $\boldsymbol{u}$ = (u_1, u_2) dostaneme parametrické vyjádření přímky v souřadnicích:

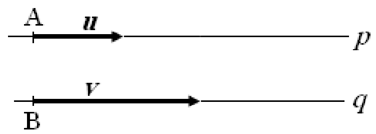
$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \ t \in R \end{aligned}$$

Vzájemná poloha dvou přímek daných parametrickou rovnicí

Máme dvě přímky *p*, *q*:

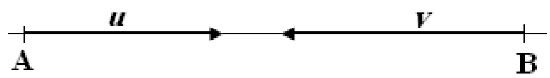
$$p: \quad x = a_1 + tu_1 \qquad\qquad q: x = b_1 + sv_1$$
$$y = a_2 + tu_2, \quad t \in R \qquad\qquad y = b_2 + sv_2, \quad s \in R$$

1. Přímky *p*(A, ***u***) a *q*(B, ***v***) jsou rovnoběžné různé tehdy, je-li vektor ***v*** násobkem vektoru ***u***, tj, platí ***u*** = *k**v***.



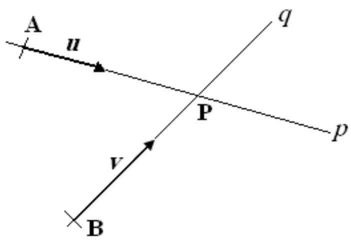
Obr. č. 12: Přímky rovnoběžně různé

2. Přímky *p*(A, ***u***) a *q*(B, ***v***) jsou totožné (splývající) tehdy, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod B na přímce *p*.



Obr. č. 13: Přímky totožné

3. Přímky *p*(A, ***u***) a *q* (B, ***v***) jsou různoběžné tehdy, nejsou-li rovnoběžné ani totožné. V tomto případě se poté počítá jejich průsečík.



Obr. č. 14: Přímky různoběžné

Př.: Jsou dány přímky *p*(A, ***u***) a *q*(Q, ***v***), A = [2, -1], ***u*** = (1, 2), B = [0, -2], ***v*** = (1, 1).
Určete vzájemnou polohu přímek *p*, *q*, jsou-li různoběžné, pak určete jejich průsečík.

1. Nejprve zjistíme, zda přímky nejsou rovnoběžné. Je vidět, že směrový vektor ***u*** = (1, 2) není násobkem směrového vektoru ***v*** = (1, 1). Přímky *p* a *q* proto nejsou rovnoběžné a nemohou být ani totožné.
2. Obě dvě přímky si vyjádříme parametricky:
$$p: x = 2 + t \qquad\qquad q: x = s$$
$$y = -1 + 2t, \quad t \in R \qquad\qquad y = -2 + s, \quad s \in R$$
3. Nyní budeme hledat společný bod těchto přímek, tedy bod, jehož *x*-ová i *y*-ová souřadnice je v rovnicích obou přímek stejná. Použijeme přitom metodu porovnání stran, tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 2 + t &= s \\ -1 + 2t &= -2 + s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t - s &= -2 && / \cdot (-1) \\ 2t - s &= -2 + 1 && / \textit{ upravíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -t + s &= 2 \\ 2t - s &= -1 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst a tak zjistit neznámou *t*:

$$\begin{aligned} -t + 2t + s - s &= 2 - 1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Neznámou *t* dosadíme do jakékoli rovnice a zjistíme neznámou *s*:

$$\begin{aligned} 2 + t &= s \\ 2 + 1 &= s \\ s &= 3 \end{aligned}$$

4. Řešením soustavy je $t = 1$ a $s = 3$. Toto jsou hodnoty parametrů, které odpovídají souřadnicím námi hledaného průsečíku přímek *p* a *q* v jejich parametrických vyjádřeních. Bude stačit, pokud dosadíme $t = 1$ do parametrické rovnice přímky *p*, nebo $s = 3$ do parametrické rovnice přímky *q* a vypočítáme souřadnice:

   Pro $t = 1$:

$$\begin{aligned} p: x &= 2 + t = 2 + 1 = 3 \\ y &= -1 + 2t = -1 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

   Pro $s = 3$:

$$\begin{aligned} q: x &= s = 3 \\ y &= -2 + s = -2 + 3 = 1 \end{aligned}$$

5. Přímky *p* a *q* jsou různoběžné. Jejich průsečíkem je bod P =[3, 1].

OBECNÉ VYJÁDŘENÍ PŘÍMKY

Definice 23 (normálový vektor).

Nechť máme směrový vektor ***u*** přímky *p*. Vektor ***n***, který je kolmý ke směrovému, nazýváme normálovým vektorem přímky *p*.

Definice 24 (obecná rovnice přímky):

Rovnici

$$ax + by + c = 0,$$

kde aspoň jedno z čísel *a*, *b* je nenulové, nazýváme obecnou rovnicí přímky. (Kočandrle, Boček, 2008)

Vzájemná poloha dvou přímek, které jsou zadány obecnou rovnicí

Máme dvě přímky p, q:

$$p: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad\qquad q: \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1. Přímky p a q jsou rovnoběžně různé právě tehdy, jsou-li normálové vektory (a_1, b_1) a (a_2, b_2) rovnoběžné, tj. platí $(a_1, b_1) = k(a_2, b_2)$ kde $k \in R$ a navíc $c_1 \neq kc_2$.
$$a_1x + b_2y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

2. Přímky p a q určují stejnou přímku (jsou totožné) právě tehdy, je-li jedna z nich násobkem druhé. Platí tedy: normálové vektory (a_1, b_1) a (a_2, b_2) jsou rovnoběžné, tj. platí $(a_1, b_1) = k\,(a_2, b_2)$ kde $k \in R$ a navíc $c_1 = kc_2$.
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
3. nejsou-li přímky p, q rovnoběžné ani totožné, pak jsou různoběžné. V tomto případě se poté počítá jejich průsečík.

Vzájemná poloha dvou přímek, z nichž jedna je zadána parametrickou a druhá obecnou rovnicí

Máme dvě přímky p, q

$$p: x = a_1 + tu_1 \qquad\qquad q: ax + by + c = 0,$$
$$y = a_2 + tu_2$$

přímka p je zadána parametrickou rovnicí a přímka q obecnou rovnicí, pak:
1. přímky p, q jsou rovnoběžně různé, jestliže vektory (u_1, u_2) a (a, b) jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový;
2. přímky p, q jsou totožné (splývající), jestliže vektory (u_1, u_2) a (a, b) jsou kolmé, tj. jejich skalární součin je nulový a bod $[a_1, a_2]$ leží na přímce q;
3. přímky p, q jsou různoběžné, jestliže vektory (u_1, u_2) a (a, b) nejsou kolmé, tj. jejich skalární součin není nulový.

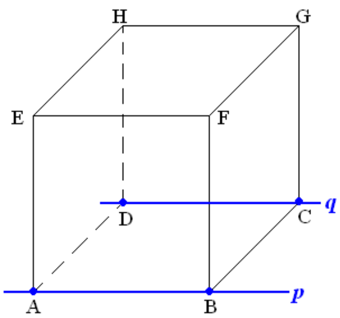
7 Přímka v prostoru

Mnoho poznatků, které jsme si řekli o geometrii v rovině, můžeme také uplatnit v prostoru. V této kapitole se budeme zabývat vzájemnou polohou dvou přímek v prostoru v souvislosti s jejím parametrickým vyjádřením.

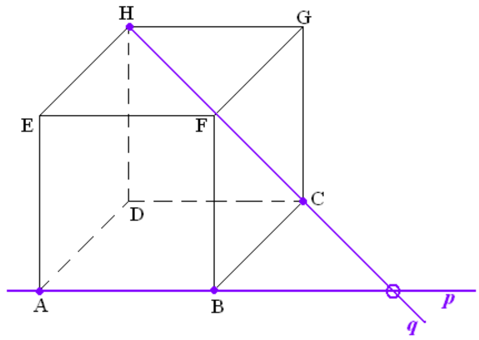
7.1 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

Máme dvě přímky p, q v prostoru:

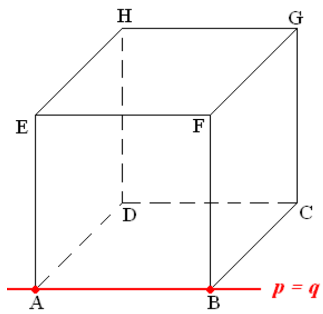
1. pokud přímky p a q nemají žádný společný bod, mohou být rovnoběžné různé nebo mimoběžné;
    - přímky $p(\mathrm{A}, \boldsymbol{u})$ a $q(\mathrm{B}, \boldsymbol{v})$ jsou rovnoběžné různé, pokud nemají žádný společný bod a $\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}$, pro nějaké $k \in R$; (viz obr. č. 15)
    - přímky jsou mimoběžné, pokud nemají žádný společný bod a zároveň nejsou rovnoběžné. Tato vzájemná poloha přímek nemůže nastat v rovině;
      Mimoběžnými přímkami neboli mimoběžkami nazýváme takové dvě přímky, které neleží v téže rovině (což v případě mimoběžek znamená, že neexistuje žádna rovina, do které by obě dvě přímky patřily). (viz obr. č. 16) (Kadleček, 1996, s. 143)
2. přímky $p(\mathrm{A}, \boldsymbol{u})$ a $q(\mathrm{B}, \boldsymbol{v})$ jsou totožné (splývající) tehdy, jsou-li rovnoběžné a leží-li bod B na přímce p; (viz obr. č. 17)
3. přímky p a q jsou různoběžné právě tehdy, mají-li společný právě jeden bod, který nazýváme průsečík. (viz obr. č. 18)



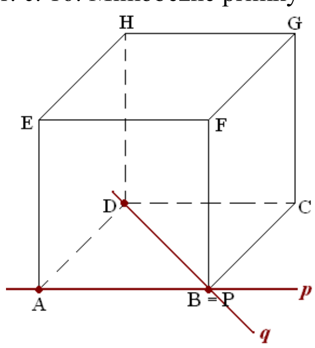
Obr. č. 15: Přímky rovnoběžné



Obr. č. 16: Mimoběžné přímky



Obr. č. 17: Přímky totožné



Obr. č. 18: Přímky různoběžné

7.2 Parametrické vyjádření přímky v prostoru

Definice 25 (parametrické vyjádření přímky):

Rovnici ve tvaru

$$X = A + t\boldsymbol{u},\ t \in R$$

nazýváme parametrickou rovnicí přímky $p(A, \boldsymbol{u})$. Proměnnou t nazýváme parametrem.

Body X, A a vektor $\boldsymbol{u}$, můžeme vyjádřit pomocí souřadnic. Pro body $A = [a_1, a_2, a_3]$, $X = [x, y, z]$ a vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dostaneme parametrické vyjádření přímky v souřadnicích:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1, \\ y &= a_2 + tu_2, \qquad t \in R \\ z &= a_3 + tu_3, \end{aligned}$$

Na příkladu si ukážeme, jak zjistíme vzájemnou polohu dvou přímek v prostoru (definovanou v kapitole 7.1) pomocí parametrického vyjádření dvou přímek:

Př.: Určete vzájemnou polohu přímek $p(A, \boldsymbol{u})$ a $q(B, \boldsymbol{v})$, je-li $A=[1, 3, 5]$, $B = [-1, -2, 4]$, $\boldsymbol{u} = (2, 1, 1)$ a $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 1)$.

1. Nejprve se podíváme na směrové vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Vidíme, že vektor $\boldsymbol{u}$ není násobkem vektoru $\boldsymbol{v}$. Tím jsme zjistili, že přímky nemohou být rovnoběžné, ani totožné. Přímky mohou být tedy buď různoběžné, nebo mimoběžné. Pokud jsou mimoběžné, nemají žádný společný bod, pokud jsou různoběžné, mají společný bod jeden.
   Hledáme společné body přímek p a q:
2. Obě dvě přímky si vyjádříme parametricky:

$$p: \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 5 + t, \quad t \in R \end{aligned} \qquad q: \begin{aligned} x &= -1 - s \\ y &= -2 + 2s \\ z &= 4 + s, \quad s \in R \end{aligned}$$

3. Nyní budeme hledat společný bod těchto přímek, tedy bod, jehož x-ová y-ová a z-ová souřadnice je v rovnicích obou přímek stejná. Použijeme přitom metodu porovnání stran, tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= -1 - s \\ 3 + t &= -2 + 2s \\ 5 + t &= 4 + s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t + s &= 0 \\ t - 2s &= -5 \\ t - s &= -1 \end{aligned}$$

Z třetí rovnice si vyjádříme t a dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} t - s &= -1 \\ t &= -1 + s \end{aligned}$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} t - 2s &= -5 \\ -1 + s - 2s &= -5 \\ -1 - s &= -5 \\ -s &= -4 \\ s &= 4 \end{aligned}$$

Do vyjádřeného t dosadíme s:

$$\begin{aligned} t &= -1 + s \\ t &= -1 + 4 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

4. Spočtené hodnoty parametrů dosadíme do první rovnice:

$$\begin{aligned} 1 + 2t &= -1 - s \\ 1 + 2 \cdot 3 &= -1 - 4 \\ 1 + 6 &= -5 \\ 7 &= -5 \end{aligned}$$

5. Protože soustava nemá žádné řešení, znamená to, že přímky p a q nemají žádný společný bod. Přímky p a q jsou mimoběžné.

8 Matice

Při řešení různých úloh se poměrně často setkáváme s maticemi a tak je tomu i u soustav lineárních rovnic. V této kapitole se budeme zabývat maticemi, objasníme si pojem matice, zmíníme některé druhy matic a hodnost matice.

Definice 26 (matice)

Obdélníkové schéma sestavené z reálných čísel

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme (reálnou) maticí typu $m \times n$. Prvek a_{ij} se nazývá ij-tý koeficient matice **A***. Množinu všech reálných matic typu $m \times n$ značíme $R^{m \times n}$. Je-li $m = n$, říkáme, že matice je čtvercová řádu n. Podobně definujeme množinu komplexních matic typu $m \times n$ a značíme ji $C^{m \times n}$.*(Rohn, 2004, s. 17)

Číslo a_{ij} nazýváme prvkem matice **A**, i řádkovým indexem, j sloupcovým indexem. Prvky se stejným řádkovým a sloupcovým indexem nazýváme diagonálními prvky matice **A** a jejich spojnici hlavní úhlopříčkou (diagonálou) matice **A**.

Každý řádek matice je pak uspořádaná n-tice čísel a_{i1}, $a_{i2}, \dots,$ a_{in}, $i = 1, 2, \dots, m$; takovou uspořádanou n-tici čísel nazveme vektorem.

Rozšířenou maticí soustavy pak nazýváme matici

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

8.1 Operace s maticemi

Definice 27 (rovnost matic)

Matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ považujeme za sobě rovné, jsou-li shodného typu $m \times n$ a platí-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Definice 28 (součet matic)

Jsou-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matice stejného typu $m \times n$, rozumíme jejich součtem matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Definice 29 (rozdíl matic)

Jsou-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matice stejného typu $m \times n$, rozumíme jejich rozdílem matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Definice 30 (násobení matice reálným číslem)

Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a s reálné číslo, rozumíme zápisem $s \cdot \mathbf{A}$ matici $(s \cdot a_{ij})$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 31 (součin matic)

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{jk})$ je matice typu $n \times p$. Součinem matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ik})$ typu $m \times p$ takovou, že

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, p$.

Prvek v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dostaneme tedy tak, že skalárně vynásobíme i-tý řádek matice **A** s k-tým sloupcem matice **B**. Abychom mohli tento skalární součin vektorů (viz Definice 19) provést, musí mít matice **A** tolik sloupců, kolik má matice **B** řádků.

8.2 Typy matic

Definice 32 (regulární, singulární matice)

Nechť **A** je čtvercová matice n-tého stupně. Jestliže platí:

a) $h(\mathbf{A}) = n$, nazýváme **A** regulární maticí,

b) $h(\mathbf{A}) < n$, nazýváme **A** singulární maticí. (Svätokrížny, 1985)

Definice 33 (jednotková matice):

Čtvercovou matici ($n \times n$), která má hodnost n, nazýváme jednotkovou, pokud má na své hlavní diagonále prvky rovny 1 a ostatní prvky matice jsou nulové. Jednotkovou matici budeme označovat **I**.

Definice 34 (transponované matice):

Nechť **A** je matice typu $m \times n$. Matici typu $\mathbf{A}^\mathbf{T}$, která vznikne z **A** tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, nazýváme maticí transponovanou k matici **A**. (Klůfa, Coufal, 2003)

Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí **AB** = **BA**.

V kapitole 5 v Definici 13 jsme si zavedli pojem vektor a vektorový prostor. Nyní budeme definovat vektor pomocí matice:

Definice 35 (vektor)

Matici typu $n \times 1$ nazýváme n-rozměrným vektorem a značíme ho

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

resp. $x = (x_i)$. Koeficienty x_i nazýváme složkami (souřadnicemi) vektoru x. (Rohn, 2004)

Protože jsou vektory speciálním případem matic, vztahují se na ně dříve definované operace (Definice 27 – 31).

Na základě Definice 34 a Definice 35 můžeme zavést následující definici:

Definice 36 (transponovaný vektor)

Nechť máme n-rozměrný vektor, který je speciálním případem matice typu $n\times 1$. Vektor $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, který vznikne z vektoru $\boldsymbol{x}$ tak, že zaměníme řádky za sloupce, přičemž zachováme jejich pořadí, nazýváme vektorem transponovaným k vektoru $\boldsymbol{x}$.

8.3 Hodnost matice

Hodností matice **A** rozumíme maximální počet jejich lineárně nezávislých nenulových řádků matice. *To znamená, že hodnost matice je h, je-li mezi jejími řádky některých h řádků lineárně nezávislých, ale je-li přitom každá skupina h + 1 jejích řádků lineárně závislá.* (Jarník, Šišler, 1969, s. 176) Takovouto hodnost přesněji nazýváme řádkovou hodností matice **A**. Analogicky se dá definovat tzv. sloupcová hodnost pomocí maximálního počtu lineárně nezávislých sloupcových vektorů matice. Hodnost matice **A** značíme $h(\mathbf{A})$.

V matici, kde se všechny prvky rovnají nule (tzn., jedná se o matici nulovou), je hodnost rovna nule. Hodnost matice, ve které jsou každé dva řádky lineárně závislé, ale jejíž aspoň jeden prvek se nerovná nule, je rovna jedné.

Trojúhelníkovou maticí rozumíme matici, ve které jsou prvky po jedné straně hlavní úhlopříčky rovny nule (a prvky diagonální a prvky na druhé straně jsou zpravidla nenulové). O horní resp. dolní trojúhelníkové matici mluvíme, jsou-li prvky „pod“, resp. „nad“ hlavní diagonálou rovny nule.

Definice 37 (horní trojúhelníková matice):

Matici typu $m\times n$ nazýváme trojúhelníkovou, když $m \le n$ a pro $i = 1, \dots, m$ je $a_{ii} \neq 0$ a $a_{ij} = 0$ pro $j < i$. (Holenda, Havel, 1984)

Trojúhelníkovou matici budeme označovat $\mathbf{A}^{\Delta}$. Horní trojúhelníková matice má schéma

$$\mathbf{A}^{\Delta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

8.4 Elementární úpravy matice

Hodnost matice se nemění určitými úpravami, které nazýváme úpravy ekvivalentní. Mezi základní úpravy matic patří:

1. vyměníme-li pořadí řádků nebo sloupců v matici **A**;
2. nahradíme-li řádek nebo sloupec matice **A** jeho α-násobkem, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$;

3. nahradíme-li řádek nebo sloupec matice **A** jeho součtem s α-násobkem jiného řádku $(\alpha \in R,\ \alpha \neq 0)$;
4. vynecháme-li řádek nebo sloupec, který je lineární kombinací řádků nebo sloupců ostatních.

9 Determinant

Stejně jako je tomu u matic, tak i determinanty zaujímají důležitou roli ve vyšší matematice a souvisí s tématem lineárních rovnic. V této kapitole se seznámíme s pojmem determinant a s jeho výpočtem.

Definice 38 (determinantu):

Mějme čtvercovou matici n-tého stupně s reálnými prvky (je $n \in N$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

*Takovéto (čtvercové!) matici je možno jednoznačným způsobem přiřadit reálné číslo, které ji bude jistým způsobem charakterizovat. Toto číslo se nazývá determinant matice **A** a značí se*

$$det\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Stejně jako u matic i zde hovoříme o determinantu n-tého řádu.

(Kotvalt, 2005, s. 20)

Prvky a_{ij} nazýváme prvky determinantu, řádky a sloupce zadané matice **A** nazýváme řádky a sloupce determinantu *det***A**.

Je důležité vědět, že determinant:

1. se nezmění, přičteme-li k jednomu jeho řádku lineární kombinaci ostatních řádků;
2. se nezmění, zaměníme-li v něm řádky za sloupce;
3. změní znaménko, vyměníme-li mezi sebou řádky;
4. je roven nule, je-li jeden z jeho řádků lineární kombinací ostatních.

9.1 Výpočet determinantu

Pro $n = 2$:

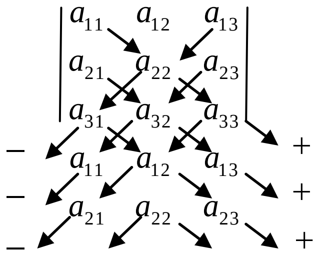
Při výpočtu determinantu 2. řádu využíváme křížového pravidla, díky němuž vypočítáme hodnotu determinantu. Od součinu diagonálních prvků a_{11}, a_{22} odečteme součin prvků a_{12}, a_{21}.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Př.: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 6 + 4 = 10$

Pro n = 3:

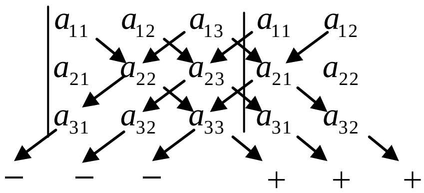
Při výpočtu determinantu 3. řádu využíváme Sarrusova pravidla. Princip tohoto pravidla si ukážeme na následujícím schématu:



Postup spočívá v tom, že první dva řádky opíšeme ještě jednou, a to jako čtvrtý a pátý řádek. Součiny trojic, které jsou ve směru hlavní diagonály, opatříme znaménkem plus. Součiny trojic, které jsou v opačném směru, tedy ve směru vedlejší diagonály, opatříme znaménkem mínus. Tyto členy mezi sebou sečteme. Toto schéma zapisujeme:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - \\ - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Můžeme se setkat s jiným zápisem Sarrusova pravidla. Tento postup spočívá v tom, že první dva sloupce opíšeme ještě jednou, a to jako čtvrtý a pátý sloupec. Součiny trojic, které jsou ve směru hlavní diagonály, opatříme znaménkem plus. Součiny trojic, které jsou v opačném směru, tedy ve směru vedlejší diagonály, opatříme znaménkem mínus.



Toto schéma zapisujeme:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - \\ - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Pro n >3:

Při výpočtu determinantu 4. a vyššího řádu využíváme rozvoje determinantu podle řádku (sloupce).

9.2 Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce)

Máme čtvercovou matici n-tého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nejdříve budeme definovat pojem algebraického doplňku prvku a_{ij}. Vynecháme-li z matice **A** i-tý řádek a j-tý sloupec, dostaneme matici $n - 1$ a z této matice lze vypočítat determinant, kterému říkáme subdeterminant. Tento subdeterminant budeme označovat A^*_{ij}. Vynásobíme-li tento subdeterminant číslem $(-1)^{i+j}$ (i zde reprezentuje i-tý řádek, j j-tý sloupec) získáme algebraický doplněk prvku a_{ij}, který označujeme A_{ij}. Platí tedy:

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{A}^*_{ij}.$$

Nyní si zvolíme libovolný i-tý řádek zadané matice **A** (je $1 \leq i \leq n$). Prvky tohoto řádku jsou pak čísla a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in} a k nim náležející subdeterminanty $\mathrm{A}^*_{i1}, \mathrm{A}^*_{i2}, \dots, \mathrm{A}^*_{in}$. Pro hodnotu determinantu matice **A** pak platí následující rozvoj podle i-tého řádku:

$$det\mathbf{A} = (-1)^{i+1} a_{i1}\mathrm{A}^*_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}\mathrm{A}^*_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}\mathrm{A}^*_{in}.$$

Rozvoj můžeme upravit:

$$det\mathbf{A} = a_{i1}\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\mathrm{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathrm{A}_{in}.$$

Obdobně tomu bude, pokud místo i-tého řádku vezmeme j-tý sloupec matice. Prvky tohoto sloupce jsou pak čísla a_{1j}, a_{2j}, …, a_{nj} a k nim náležející subdeterminanty $\mathrm{A}^*_{1j}, \mathrm{A}^*_{2j}, \dots, \mathrm{A}^*_{nj}$. Pro hodnotu matice A pak platí následující rozvoj podle j-tého sloupce:

$$det\mathbf{A} = (-1)^{1+j} a_{1j}\mathrm{A}^*_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j}\mathrm{A}^*_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj}\mathrm{A}^*_{nj}.$$

Rozvoj můžeme upravit:

$$det\mathbf{A} = a_{1j}\mathrm{A}_{1j} + a_{2j}\mathrm{A}_{2j} + \dots + a_{nj}\mathrm{A}_{nj}.$$

Př.: Pomocí rozvoje vypočtěte determinant

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinant spočítáme např. pomocí rozvoje podle prvního řádku. Tuto možnost volíme proto, neboť první řádek obsahuje dva prvky, které jsou nulové, tím si ulehčíme výpočet. Mohli bychom si zvolit i třetí sloupec, který také obsahuje dva nulové prvky. Volba závisí na nás.

$$det\mathbf{A} = (-1)^{1+1}\cdot 4\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+4}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

Pro lepší přehlednost bude lepší, když si nejdříve spočítáme všechny subdeterminanty. Z vyjádření výpočtu determinantu **A** je zřejmé, že budeme počítat pouze subdeterminanty A^*_{11}, A^*_{13}, zbylé dva počítat nemusíme, protože jsou násobeny číslem 0. Z tohoto důvodu bylo nejlepší zvolit rozvoj determinantu podle prvního řádku. Subdeterminanty budeme počítat pomocí Sarrusova pravidla.

$$\mathrm{A}^*_{11} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot(-1)\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= -1 + 0 + 0 + 6 - 0 - 0 = 7$$

$$\mathrm{A}^*_{13} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 2 + 1 + 12 - 6 - 2 - 2 = 5$$

Vypočtené subdeterminanty dosadíme do výpočtu pro *det***A** a spočítáme výsledný determinant:

$$det\,\mathbf{A} = (-1)^{1+1}\cdot 4\cdot 7 + 0 + (-1)^{1+3}\cdot 2\cdot 5 + 0 = 1\cdot 4\cdot 7 + 1\cdot 2\cdot 5 = 28 + 10 = 38$$

10 Soustava *m* lineárních rovnic o *n* neznámých

Poznatky, které jsme si řekli v předchozích kapitolách, nyní uplatníme. Budeme se zabývat soustavami rovnic a jejich řešením z pohledu vyšší matematiky.

Definice 39 (soustava *m* lineárních rovnic o *n* neznámých)

Soustavou *m* lineárních rovnic o *n* neznámých nazýváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Čísla $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ nazýváme koeficienty soustavy; $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazýváme neznámé a $b_1, b_2, \dots, b_m$ nazýváme absolutními členy.

(Bučko, Buša, Schrőtter, 1991)

Řešením zadané soustavy rovnic je každá uspořádaná *n*-tice čísel $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, tj. *n*-členný vektor takový, že při dosazení $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ za neznámé $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou splněny všechny rovnice soustavy. Ekvivalentními soustavami lineárních rovnic nazýváme takové dvě soustavy lineárních rovnic (tj. o stejném počtu neznámých) u kterých platí, že každé řešení první soustavy lineárních rovnic je zároveň řešením druhé soustavy a naopak. (Místo neznámých x_i používáme též malých písmen latinské abecedy, tj. *x, y,…, z)*

Soustavu definovanou v Definici 39 můžeme přepsat v maticovém tvaru $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde **A** je [$m \times n$]-matice soustavy, $\boldsymbol{x}$ je sloupcový vektor neznámých, $\boldsymbol{b}$ je sloupcový vektor pravých stran. Po přepisu součinu $\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ (viz kap. 8, Definice 31) dostáváme uvedenou soustavu (Definice 39), kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Soustava $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení, pokud vektor $\boldsymbol{b}$ pravých stran je lineární kombinací sloupců matice **A**.

10.1 Homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic

Definice 40 (homogenní a nehomogenní soustava lineárních rovnic):

Soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $a_{11}, ..., a_{mn}, b_1, ..., b_m$ jsou daná čísla (reálná, resp. komplexní) nazýváme homogenní, jestliže $b_i = 0$, pro $i = 1, 2, \ldots m$. V opačném případě, pokud alespoň jedno *b* je nenulové, nazýváme soustavu lineárních rovnic nehomogenní. (Šmarda, 1982)

Definice 41 (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ se rovná hodnosti matice rozšířené $h(\mathbf{A}_r)$. (Bican, 2009)

<u>Řešení homogenní soustavy:</u>

Pro každou homogenní soustavu (viz Definice 40) platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r)$. Na základě Frobeniovi věty (viz Definice 41) má každá homogenní soustava rovnic alespoň jedno řešení. Jedním z těchto řešení je nulové (triviální) řešení.

Počet řešení homogenní soustavy (Bučko, Buša, Schrötter, 1992)**:**

Nechť $h(\mathbf{A})$ je hodnost matice **A**, $h(\mathbf{A}_r)$ je hodnost matice rozšířené $\mathbf{A}_r$, *n* je počet neznámých:

1) je-li $n = h(\mathbf{A})$, kde *n* je počet neznámých, pak má homogenní soustava pouze triviální řešení, $\boldsymbol{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.
2) je-li $n > h(\mathbf{A})$, pak homogenní soustava má nekonečně mnoho řešení. $(n - h(\mathbf{A}))$ neznámých můžeme vhodným způsobem zvolit, ostatní neznámé jsou potom jednoznačně určené v závislosti na zvolených neznámých. V případě, že homogenní soustava, která je definována v Definici 40, má $m = n$, dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

která má netriviální (nenulové) řešení právě tehdy, jestliže

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Řešení nehomogenní soustavy:</u>

Na základě Frobeniovi věty (viz Definice 41) můžeme říci:
Nehomogenní soustava lineárních rovnic je řešitelná, právě když hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ je rovna hodnosti matice rozšířené $h(\mathbf{A}_r)$.

Počet řešení nehomogenní soustavy (Haviar, Hrnčiar, Klenovčan, 1991)**:**

Nechť $h(\mathbf{A})$ je hodnost matice **A**, $h(\mathbf{A}_r)$ je hodnost matice $\mathbf{A}_r$ rozšířené, n je počet neznámých, pak:

1. je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) = n$ soustava má právě jedno řešení.
2. je-li $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}_r) < n$ soustava má nekonečně mnoho řešení a použijeme parametrizaci.

Nehomogenní soustava nemá řešení, pokud upravíme matici **A** na trojúhelníkovou matici a dostaneme řádek typu $(0\ 0\ \dots\ 0 \mid c)$, $c \neq 0$, který odpovídá rovnici $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = c,\ c \neq 0,$ která nemá řešení.

10.2 Řešení

Při řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých používáme:

1. Gaussovu eliminační metodu
2. Cramerovo pravidlo
3. Inverzní matici

10.2.1 Gaussova eliminační metoda

Slouží při redukci rovnic a eliminaci jejich neznámých. Principem Gaussovy eliminace je převedení zadané soustavy lineárních rovnic na soustavu, která má stejnou množinu řešení jako má původní soustava lineárních rovnic. Původní soustavu lineárních rovnic, převedeme na tvar, ze kterého je možno její řešení zjistit nebo potvrdit, že žádné neexistuje. Původní soustavu, resp. její matice soustavy, převedeme na horní trojúhelníkový tvar pomocí ekvivalentních úprav. Hodnost této matice je potom rovna počtu nenulových řádků. Soustavu poté řešíme od jejich posledních řádků, např. při hodnosti 3 určením třetí, druhé a první rovnice, tomuto postupu říkáme zpětný chod.

Výše zmíněnou metodu si ukážeme na následujícím příkladu:

Př. Eliminační metodou nalezněte řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\begin{gathered} x - y - 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ -x - 2y - z = -3 \end{gathered}$$

Postup při nalezení řešení si rozdělíme do jednotlivých kroků.
Při eliminaci budeme pracovat pouze s rozšířenou maticí soustavy, neznámé vypisovat nebudeme.

Vycházíme z matice:

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

Je důležité, abychom oddělili pravou a levou stranu.

1. Krok eliminace: za hlavní prvek si zvolíme a_{11}= 1. Nyní budeme provádět takové ekvivalentní úpravy, abychom pod hlavním prvkem dostali samé nuly, tzn. aby a_{21}= a_{31}= 0. Operace, které budeme provádět, budeme psát napravo u příslušných řádků matice.

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \quad + \\ \end{array}$$

Jak ukazuje schéma matice, nejprve budeme první řádek násobit (-2) a poté ho sčítat s druhým. V druhé operaci budeme sčítat první řádek s třetím řádkem. Tím docílíme toho, že se prvky a_{21} a a_{31} stanou nulové. Získali jsme matici, která je ekvivalentní s maticí výchozí:

$$\mathbf{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Nyní bychom mohli poslední řádek vydělit -3, ale bude lepší, když si ho ponecháme v tomto tvaru.

2. Krok eliminace: Nyní si za hlavní prvek zvolíme a_{22} = 3. Našim úkolem bude, aby se prvek pod ním (tedy prvek a_{32}) stal nulovým. Příslušná operace je uvedena vpravo od matice $\mathbf{A}_2$.

$$\mathbf{A}_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array}$$

Budeme tedy sčítat druhý řádek s řádkem třetím. Z tohoto důvodu jsme v předcházejícím kroku nedělili poslední řádek -3. Je jednodušší, když budeme řádky pouze mezi sebou sčítat, než nejdříve hledat společný násobek a teprve potom provádět operaci sčítání. Pomocí operace jsme tedy docílili toho, že se a_{32} stalo nulové. Získali jsme tedy matici, která je ekvivalentní s maticí původní i s maticí $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right)$$

Eliminace je dokončena, rovnici výchozí jsme převedli do horního trojúhelníkového tvaru, kde se pod diagonálou nachází nuly. Nyní budeme provádět výpočet neznámých. Rozšířená matice $\mathbf{A}_3$ nám zde reprezentuje soustavu rovnic, která je ekvivalentní se zadanou (tedy původní) soustavou. Nyní si rozšířenou matici $\mathbf{A}_3$ přepíšeme do soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ 3y + 7z &= -1 \\ 4z &= -4 \end{aligned}$$

Tuto soustavu rovnic budeme řešit „odzadu“, to znamená, že nejprve využijeme třetí, poté druhou rovnici až se dostaneme k rovnici první.
Ze třetí rovnice víme:

$$\begin{aligned} 4z &= -4 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Získanou hodnotu z dosadíme do druhé rovnice a zjistíme neznámou y:

$$\begin{aligned} 3y + 7z &= -1 \\ 3y + 7 \cdot (-1) &= -1 \\ 3y - 7 &= -1 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Získané hodnoty z a y dosadíme do první rovnice a získáme neznámou x:

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ x - 2 - 2 \cdot (-1) &= 0 \\ x - 2 + 2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme řešení:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Řešením je tedy uspořádaná trojice čísel, tedy vektor. Tento vektor budeme zapisovat $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (0, 2, -1).^{\mathrm{T}}$

<u>*Poznámka:*</u> transponovaný vektor $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ jsme definovali v kapitole 8, v Definici 36.

10.2.2 Cramerovo pravidlo

Soustavu algebraických rovnic se čtvercovou maticí soustavy můžeme řešit s použitím determinantů. Podmínkou však je, že determinant musí být nenulový, tj. matice je regulární, v opačném případě využíváme jiné metody, pomocí kterých nalezneme řešení soustavy.

Definice 42 (Cramerovo pravidlo):

Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou zadaná reálná čísla. Tato soustava n lineárních rovnic o n neznámých má nenulový determinant soustavy

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Soustava má právě jedno řešení $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, které můžeme zapsat ve tvaru

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$\mathbf{A}_i$ je matice, která vznikne z matice soustavy $\mathbf{A}$ po náhradě i-tého sloupce sloupcem pravých stran rovnice soustavy. (Klůfa, Coufal, 2003; Rektorys, 2007)

Na následujícím příkladu si názorně ukážeme Cramerovo pravidlo:

Př.: Pomocí Cramerova pravidla řešte následující soustavu rovnic

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1$$
$$-x_1 - 2x_2 - x_3 = -3$$

Nejprve si spočítáme $det\mathbf{A}$:

$$det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\cdot(-2) - (-2)\cdot 1\cdot(-1) - \\ -1\cdot 3\cdot(-2) - (-1)\cdot 2\cdot(-1) = -1 + 3 + 8 - 2 + 6 - 2 = 12$$

Nyní budeme počítat $det\mathbf{A}_i$ pro $i = 1, 2, 3$.

V $det\mathbf{A}_1$ nahradíme první sloupec sloupcem pravé strany rovnice a spočítáme jej:

$$det\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 3\cdot(-3) + (-2)\cdot(-1)\cdot(-2) - \\ -(-2)\cdot 1\cdot(-3) - 0\cdot 3\cdot(-2) - (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = \\ = 0 + 9 - 4 - 6 + 0 + 1 = 0$$

V $det\mathbf{A}_2$ nahradíme druhý sloupec sloupcem pravé strany rovnice a spočítáme jej:

$$det\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 2\cdot(-3) - (-2)\cdot(-1)\cdot \\ \cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot(-3) - 0\cdot 2\cdot(-1) = 1 + 0 + 12 + 2 + 9 + 0 = \\ = 24$$

V $det\mathbf{A}_3$ nahradíme třetí sloupec sloupcem pravé strany rovnice a spočítáme jej:

$$det\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-3) + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 2\cdot(-2) - 0\cdot 1(-1) - \\ -1\cdot(-1)\cdot(-2) - (-1)\cdot 2\cdot(-3) = -3 - 1 + 0 + 0 - 2 - \\ -6 = -12$$

Nyní dosadíme do vzorce $x_i = \dfrac{det\mathbf{A}_i}{det\mathbf{A}}$ (i = 1, 2, …., n) a spočítáme neznámé x_1, x_2, x_3:

Pro x_1:

$$x_1 = \frac{det\mathbf{A}_1}{det\mathbf{A}} = \frac{0}{12} = 0$$

Pro x_2:

$$x_2 = \frac{det\mathbf{A}_2}{det\mathbf{A}} = \frac{24}{12} = 2$$

Pro x_3:

$$x_3 = \frac{det\mathbf{A}_3}{det\mathbf{A}} = \frac{-12}{12} = -1$$

Řešením je tedy uspořádaná trojice čísel, tedy vektor. Tento vektor budeme zapisovat $\boldsymbol{v} = (0, 2, -1)$.

10.2.3 Inverzní matice

Definice 43 (inverzní matice):

Inverzní maticí k regulární matici **A** nazýváme čtvercovou matici $\mathbf{A}^{-1}$ stejného řádu, pro niž platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Kde

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

je jednotková matice. (Rektorys, 2003)

Věta 2:

Inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** existuje tehdy, je-li matice **A** regulární.
Jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{3n} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

kde A je determinant matice **A** a A_{ij} je doplněk patřící prvku a_{ij} v matici **A**. (Bubeníček, 2007; Demlová, Nagy, 1982)

Mějme soustavu *m* lineárních rovnic o *n* neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$, kterou jsme si definovali v Definici 39. Zavedeme-li k uvedené soustavě *m* lineárních rovnic o *n* neznámých následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

A představuje matici soustavy, ***x*** sloupcový vektor neznámých a ***b*** sloupcový vektor pravých stran. K uvedené soustavě lineárních rovnic je pak ekvivalentní jediná maticová rovnice

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Abychom vyřešili uvedenou soustavu rovnic prostřednictvím inverzní matice, je zapotřebí si maticovou rovnici upravit:

1. Rovnici $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ vynásobíme zleva maticí $\mathbf{A}^{-1}$. Je důležité si uvědomit, že matice inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ existuje pouze tehdy, je-li matice $\mathbf{A}$ regulární.
   Získáme rovnici: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$
2. Nyní využijeme následujících vlastností inverzní matice:
   $$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$
   $$\mathbf{I}\boldsymbol{x} = \mathbf{x}$$
3. Rovnici podle vlastností upravíme a dostaneme tvar:
   $$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Výpočet inverzní matice

Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ můžeme z matice $\mathbf{A}$ získat:

1. **Eliminační metodou**: Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A}$ vytvoříme tak, že utvoříme matici $\mathbf{B} = [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$, kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Řádkovými úpravnami pak převedeme matici $\mathbf{B}$ na novou matici $\mathbf{C} = [\mathbf{I}|\mathbf{D}]$, kde matice $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}$.

2. **Pomocí determinantů**: Podle věty, kterou jsme uvedli výše (viz Věta 2), lze inverzní matici vypočítat pomocí vzorce:
   $$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} & \dots & \mathrm{A}_{n1} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} & \dots & \mathrm{A}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}_{1n} & \mathrm{A}_{2n} & \dots & \mathrm{A}_{nn} \end{pmatrix},$$
   kde $\mathbf{A}$ je determinant matice $\mathbf{A}$ a A_{ij} je doplněk patřící prvku a_{ij} v matici $\mathbf{A}$.

Na následujícím příkladu si názorně ukážeme, jak za využití inverzní matice můžeme spočítat soustavu rovnic:

Př.: Za použití inverzí matice řešte následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x - y - 2z &= 0 \\ 2x + y + 3z &= -1. \\ -x - 2y - z &= -3 \end{aligned}$$

K uvedené soustavě 3 lineárních rovnic o 3 neznámých zavedeme následující matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

kde **A** představuje matici soustavy, ***x*** sloupcový vektor neznámých a ***b*** sloupcový vektor pravých stran. K uvedené soustavě lineárních rovnic je pak ekvivalentní jediná maticová rovnice

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Uvedenou maticovou rovnici si upravíme:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad /\ \textit{rovnici vynásobíme zleva } \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

Abychom vypočítali ***x***, musíme si nejdříve zjistit matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A.** Tu můžeme zjistit buďto eliminační metodou za použití jednotkové matice, nebo za použití vzorce. Zvolím si např. eliminační metodu:

Inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici **A** vytvoříme tak, že utvoříme matici **B** = [**A**|**I**], kde **I** je jednotková matice. Řádkovými úpravnami pak převedeme matici **B** na novou matici **C** = [**I**|**D**]. Kde matice **D** = $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array}$$

$$\mathbf{B}_1 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) + \sim \mathbf{B}_2 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 2 \\ + \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \mathbf{B}_3 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot 4 \\ \cdot(-7) + \end{array} \sim \mathbf{B}_4 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 6 \\ + \\ \sim \end{array}$$

$$\sim \mathbf{B}_5 = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 12 & 0 & 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 12 & 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \div 12 \\ \div 12 \\ \div 4 \end{array} \sim \mathbf{C} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & \frac{3}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{3}{12} & -\frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Nyní dosadíme do rovnice $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-1) + \left(-\frac{1}{12}\right)\cdot(-3) \\ \left(-\frac{1}{12}\right)\cdot 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-1) + \left(-\frac{7}{12}\right)\cdot(-3) \\ \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{4} + \frac{3}{12} \\ 0 + \frac{1}{4} + \frac{21}{12} \\ 0 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3+3}{12} \\ \frac{3+21}{12} \\ -\frac{4}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{12} \\ \frac{24}{12} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektor x (tedy sloupcový vektor neznámých) je:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (0, 2, -1)^{\mathrm{T}}$$

Neznámé jsou: $x = 0$, $y = 2$, $z = -1$

10.2.4 Závěrečné shrnutí

Gaussova eliminace patří mezi jednu z nejefektivnějších a nejužívanějších metod. Používáme ji nejen při řešení soustavy lineárních algebraických rovnic, ale také při výpočtu determinantů a inverzních matic. Touto metodou je možno řešit soustavy lineárních rovnic o poměrně velkém počtu neznámých. Je však velmi vhodná i pro soustavy jednodušší (např. soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých), zejména jsou-li v rovnicích složité (několikamístné) koeficienty. Gaussovu eliminační metodu můžeme jakou jedinou z výše zmíněných aplikovat při řešení takových soustav, jejichž počet rovnic se neshoduje s počtem neznámých.

Cramerovo pravidlo využíváme tehdy, je-li matice soustavy čtvercová. Jednou z výhod využití tohoto pravidla je nižší výpočetní režie v případě většího množství nulových prvků v matici soustavy.

Soustavu algebraických rovnic můžeme řešit také za pomoci inverzní matice. Tuto metodu využíváme zřídka, s ohledem na vysoké výpočetní nároky.

11 Sbírka úloh

Sbírka úloh, kterou jsem vytvořila je určena pro 2. stupeň základní školy. Je určena k opakování a procvičení učiva lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic.

Sbírka je složena z šesti kapitol. Každá kapitola je strukturována od nejjednodušších příkladů ke složitějším. Všechny příklady jsou řešené a poskytují názornou ukázku postupu a vhodnou formu zápisu řešení úloh.

První kapitola se zabývá lineární rovnicí o jedné neznámé. Cílem je zopakovat, utřídit, zařadit a upevnit základní učivo 8. ročníku. Všechny příklady jsou názorně řešeny a jednotlivé ekvivalentní úpravy jsou popsány. Důraz je kladen na matematicky správné a účelné zapisování postupu řešení. Řešení lineárních rovnic spočívá v důsledné aplikaci ekvivalentních úprav rovnic a zjednodušení výrazů na obou stranách. Rovnice jsou postupně a názorně upravovány až je nalezeno řešení rovnice. Řešením zadané rovnice je buď jediný kořen, nebo řešení neexistuje, nebo jsou řešením všechna reálná čísla. Všechny tři možnosti řešení jsou důkladně vysvětleny a po jejich objasnění následují příklady, které slouží k procvičení dané látky. Při řešení složitějších lineárních rovnic je kladen důraz na systematičnost a správnou volbu jednotlivých kroků k docílení správného výsledku.

Druhá kapitola je zaměřena na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Podstatou této kapitoly je vyloučení jedné neznámé z rovnic soustavy. Je zde popsána a aplikována metoda sčítací a dosazovací. V některých příkladech jsou aplikovány oba způsoby řešení. Příklady se odlišují podle formulace zadání. Vybrané úlohy svým zadáním navazují na předešlé příklady, další jsou voleny tak, aby učivo procvičily v celém rozsahu a v různých souvislostech. Soustava lineárních rovnic o dvou neznámých má buď jedno řešení, žádné řešení, nebo nekonečně mnoho řešení. Všechny možnosti jsou vysvětleny a poté následují příklady k jejich procvičení. Cílem kapitoly je naučit se řešit soustavu lineárních rovnic metodou sčítací a dosazovací.

Třetí kapitola se zabývá grafickým řešením lineárních rovnic o jedné neznámé a je zaměřena na procvičení lineárních funkcí.

Ve čtvrté kapitole je popsáno grafické řešení dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Jsou zde uvedeny příklady vzájemné polohy dvou přímek v rovině.

Pátá kapitola je zaměřena na slovní úlohy a mezipředmětové vztahy. Systém rozdělování obsahů vzdělávání do jednotlivých předmětů v sobě skrývá rizika. Žákům se obsah vzdělávání nabízí v samostatných nádobách a očekává se, že si potřebnou syntézu vědění vytvoří každý sám. V tradiční pedagogice se problém izolace jednotlivých předmětů a potřeba propojování vzdělávacích obsahů řeší jako otázka mezipředmětových vztahů. Úzká specializace předmětů může vést k poznatkové roztříštěnosti a k nepochopení vzájemných souvislostí. V posledních letech však stále sílí tendence k „předmětovému“ pojetí obsahu vzdělávání. Aby byly respektovány mezipředmětové vztahy, je podstatné si uvědomit souvislosti mezi jednotlivými oblastmi učiva, předměty a tématy a učivu se věnovat právě v těchto souvislostech. Slovní úlohy by měly být rovněž začleněny do širších souvislostí problémů. Důraz by měl být kladen na schopnost orientovat se ve složitém světě přesyceném informacemi a k pochopení vzájemných souvislostí.

Toho lze docílit pouze tehdy, pokud výuku místo probírání jednotlivých více či méně izolovaných témat budeme směřovat k integraci vzdělávacích obsahů. (VÚT Praha, 2007)

Kapitola obsahuje slovní úlohy poskytující názornou ukázku postupu, úplnost a vhodnou formu zápisu úloh. Využila jsem propojení matematiky s předměty přírodopis, zeměpis, fyzika a chemie. Zaměřila jsem se zde i na problematiku ohrožených zvířat ve světě. V této kapitole se aplikují a modelují osvojené ekvivalentní úpravy z předchozích kapitol.

Šestá kapitola se zabývá rovnicemi vedoucími po úpravě na lineární rovnice. Obsahuje rovnice s kvadratickými členy a rovnice s neznámou ve jmenovateli.

Při práci se sbírkou můžeme řešit vybrané úlohy ve sledu kapitol nebo řešit vybrané úlohy bez ohledu na jejich řazení. Skladba a množství úloh ve sbírce poskytuje možnost individuálního výběru úloh z oblasti učiva, kterou si potřebujeme procvičit. Vyřešení většího počtu úloh z každé kapitoly poskytuje určitou záruku dobré, neformální a systematické přípravy pro další studium na střední školy.

Při sestavování slovních úloh jsem číselné hodnoty (např. vzdálenost dvou měst, počet ohrožených zvířat, rychlost zvířat, hustota zalidnění, aj.) čerpala z různých publikací. Z důvodu přehlednosti sbírky jsou odkazy na literaturu uvedeny pouze v kapitole Seznam literatury pro sbírku, kde jsou rovněž uvedeny publikace, které mě inspirovaly při její tvorbě.

11.1 Lineární rovnice s jednou neznámou

1. Řešte rovnici $x+3=9$. Proveďte zkoušku.

   Postup řešení: Tuto rovnici budeme řešit pomocí ekvivalentních úprav. Ekvivalentní úpravy provádíme tak, abychom na levé straně rovnice získali pouze samotnou neznámou a na pravé straně číslo. Číslo je pak řešením rovnice.

   $x+3=9$ / *Odečteme od obou stran rovnice číslo* 3

   $$x+\underbrace{3-3}_{0}=9-3$$

   $$x=6$$

   Řešením původní rovnice $x+3=9$ je číslo $x=6$.

   Nyní provedeme zkoušku, abychom si ověřili, zda jsme v průběhu neudělali chybu:

   Číslo $x=6$ dosadíme do obou stran rovnice a zjistíme, zda platí uvedená rovnost:

   $L: \quad x+3=6+3=9$
   $P: \quad 9$
   $L=P$

   Vidíme, že výrazy na levé (L) i pravé straně (P) straně se rovnají, mají stejnou hodnotu. Číslo $x=6$ je tedy řešením původní rovnice $x+3=9$.

2. Vyřešte následující rovnice, proveďte zkoušku.

   a) $x+1=4$

   Řešení:

   $x+1=4 \quad / -1$
   $x=4-1$
   $x=3$

   Zkouška:

   $L: \quad x+1=3+1=4$
   $P: \quad 4$
   $L=P$

   b) $y-5=8$

   Řešení:

   $y-5=8 \quad / +5$
   $y=8+5$
   $y=13$

   Zkouška:

   $L: \quad y-5=13-5=8$
   $P: \quad 8$
   $L=P$

3. Vyřešte následující rovnice, proveďte zkoušku.
   a) $n - 0,3 = 5,1 - 3,2$

      Řešení:

$$\begin{aligned} n - 0,3 &= 5,1 - 3,2 \quad && / \; upravíme \\ n - 0,3 &= 1,9 && / + 0,3 \\ n &= 1,9 + 0,3 && / \; upravíme \\ n &= 2,2 \end{aligned}$$

      Zkouška:

      $L: \quad n - 0,3 = 2,2 - 0,3 = 1,9$
      $P: \quad 5,1 - 3,2 = 1,9$
      $L = P$

   b) $1,7 - 2,1 = a - (5,7 - 3,1)$

      Řešení:

$$\begin{aligned} 1,7 - 2,1 &= a - (5,7 - 3,1) \quad && / \; odstraníme \; závorku \\ 1,7 - 2,1 &= a - 5,7 + 3,1 && / \; upravíme \\ -0,4 &= a - 2,6 && / + 2,6 \\ -0,4 + 2,6 &= a && / \; upravíme \\ 2,2 &= a \end{aligned}$$

      Zkouška:

      $L: \quad 1,7 - 2,1 = -0,4$
      $P: \quad a - (5,7 - 3,1) = 2,2 - 5,7 + 3,1 = -0,4$
      $L = P$

   c) $5,2 + b - 2,3 = 3,4 - (5,2 - 4,7)$

      Řešení:

$$\begin{aligned} 5,2 + b - 2,3 &= 3,4 - (5,2 - 4,7) \quad && / \; odstraníme \; závorku \\ 5,2 + b - 2,3 &= 3,4 - 5,2 + 4,7 && / \; upravíme \\ 2,9 + b &= 2,9 && / - 2,9 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

      Zkouška:

      $L: \quad 5,2 + b - 2,3 = 5,2 + 0 - 2,3 = 2,9$
      $P: \quad 3,4 - (5,2 - 4,7) = 3,4 - 5,2 + 4,7 = 2,9$
      $L = P$

4. Vyřešte následující rovnice, proveďte zkoušku.
   a) $2x = 12$

      Řešení:

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \quad / : 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

      Zkouška:

      $L: \quad 2x = 2 \cdot 6 = 12$
      $P: \quad 12$
      $L = P$

b) $2n = -10$

Řešení:

$$2n = -10 \quad / : 2$$
$$n = -5$$

Zkouška:

$L: \quad 2n = 2 \cdot (-5) = -10$

$P: \quad -10$

$L = P$

c) $-5z = -20$

Řešení:

$$-5z = -20 \quad / : (-5)$$
$$z = 4$$

Zkouška:

$L: \quad -5z = -5 \cdot 4 = -20$

$P: \quad -20$

$L = P$

5. Vyřešte následující rovnice, proveďte zkoušku.

a) $(1,3 + 0,6) \cdot v = 4,2 - 0,4$

Řešení:

$$(1,3 + 0,6) \cdot v = 4,2 - 0,4 \quad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$1,3v + 0,6v = 4,2 - 0,4 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$1,9v = 3,8 \quad / : 1,9$$
$$v = 2$$

Zkouška:

$L: \quad (1,3 + 0,6) \cdot v = (1,3 + 0,6) \cdot 2 = 3,8$

$P: \quad 4,2 - 0,4 = 3,8$

$L = P$

b) $1,4y + 1,2y = 0,8 - (0,3 - 0,8)$

Řešení:

$$1,4y + 1,2y = 0,8 - (0,3 - 0,8) \quad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$1,4y + 1,2y = 0,8 - 0,3 + 0,8 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$2,6y = 1,3 \quad / : 2,6$$
$$y = 0,5$$

Zkouška:

$L: \quad 1,4y + 1,2y = 1,4 \cdot 0,5 + 1,2 \cdot 0,5 = 1,3$

$P: \quad 0,8 - (0,3 - 0,8) = 0,8 - 0,3 + 0,8 = 1,3$

$L = P$

c) $a-2,3\cdot(a-0,7a)=1,5-4,6$

Řešení:

$$\begin{aligned} a-2,3\cdot(a-0,7a)&=1,5-4,6 \quad &&/\ \textit{odstraníme závorku}\\ a-2,3a+1,61a&=1,5-4,6 &&/\ \textit{upravíme}\\ 0,31a&=-3,1 &&/:0,31\\ a&=-10 \end{aligned}$$

Zkouška:

$L:\quad a-2,3\cdot(a-0,7a)=-10-2,3\cdot[-10-0,7\cdot(-10)]=-10-2,3\cdot(-3)=-3,1$

$P:\quad 1,5-4,6=-3,1$

$L=P$

6. Vyřešte následující rovnice.

a) $3+2v+\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3+2v+\frac{1}{4}&=\frac{2}{3} \quad &&/\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 12\\ 3\cdot12+2v\cdot12+\frac{1}{4}\cdot12&=\frac{2}{3}\cdot12 &&/\ \textit{násobíme}\\ 36+24v+\frac{12}{4}&=\frac{24}{3} &&/\ \textit{krátíme zlomky}\\ 36+24v+3&=8 &&/\ \textit{upravíme}\\ 39+24v&=8 &&/-39\\ 24v&=8-39 &&/\ \textit{upravíme}\\ 24v&=-31 &&/:24\\ v&=-\frac{31}{24} \end{aligned}$$

b) $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=a-\frac{3}{6}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}+\frac{2}{3}&=a-\frac{3}{6} \quad &&/\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 12\\ \frac{1}{4}\cdot12+\frac{2}{3}\cdot12&=12a-\frac{3}{6}\cdot12 &&/\ \textit{násobíme}\\ \frac{12}{4}+\frac{24}{3}&=12a-\frac{36}{6} &&/\ \textit{zlomky krátíme}\\ 3+8&=12a-6 &&/\ \textit{upravíme}\\ 11&=12a-6 &&/+6\\ 11+6&=12a &&/\ \textit{upravíme}\\ 17&=12a &&/:12\\ a&=\frac{17}{12} \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=x-2$

Řešení:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=x-2 \qquad /\ \textit{vynásobíme první dva zlomky}$$
$$\frac{2}{6}+\frac{7}{6}=x-2 \qquad /\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 6$$
$$\frac{2}{6}\cdot 6+\frac{7}{6}\cdot 6=6x-2\cdot 6 \qquad /\ \textit{násobíme}$$
$$\frac{12}{6}+\frac{42}{6}=6x-12 \qquad /\ \textit{krátíme zlomky}$$
$$2+7=6x-12 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$9=6x-12 \qquad /+12$$
$$9+12=6x \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$21=6x \qquad /:21$$
$$\frac{21}{6}=x \qquad /\ \textit{zlomek krátíme}$$
$$\frac{7}{2}=x$$

7. Vyřešte následující rovnice.

a) $-\frac{b}{5}=\frac{7}{10}+\frac{3}{2}$

Řešení:

$$-\frac{b}{5}=\frac{7}{10}+\frac{3}{2} \qquad /\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 10$$
$$-\frac{b}{5}\cdot 10=\frac{7}{10}\cdot 10+\frac{3}{2}\cdot 10 \qquad /\ \textit{násobíme}$$
$$-\frac{10b}{5}=\frac{70}{10}+\frac{30}{2} \qquad /\ \textit{zlomky krátíme}$$
$$-2b=7+15 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$-2b=22 \qquad /:(-2)$$
$$b=-11$$

b) $\frac{2a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{7}{10}+\frac{2}{5}$

Řešení:

$$\frac{2a}{5}+\frac{a}{10}=\frac{7}{10}+\frac{2}{5} \qquad /\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 10$$
$$\frac{2a}{5}\cdot 10+\frac{a}{10}\cdot 10=\frac{7}{10}\cdot 10+\frac{2}{5}\cdot 10 \qquad /\ \textit{násobíme}$$

$$\frac{20a}{5}+\frac{10a}{10}=\frac{70}{10}+\frac{20}{5} \qquad /\ zlomky\ krátíme$$
$$4a+a=7+4 \qquad /\ upravíme$$
$$5a=11 \qquad /:5$$
$$a=\frac{11}{5}$$

c) $\frac{3y}{2}-\frac{5y}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$

Řešení:

$$\frac{3y}{2}-\frac{5y}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} \qquad /\ násobíme\ zlomky$$
$$\frac{3y}{2}-\frac{5y}{12}=\frac{2}{3}-\frac{15}{24} \qquad /\ poslední\ zlomek\ krátíme\ 3$$
$$\frac{3y}{2}-\frac{5y}{12}=\frac{2}{3}-\frac{5}{8} \qquad /\ celou\ rovnici\ vynásobíme\ 24$$
$$\frac{3y}{2}\cdot 24-\frac{5y}{12}\cdot 24=\frac{2}{3}\cdot 24-\frac{5}{8}\cdot 24 \qquad /\ násobíme$$
$$\frac{72y}{2}-\frac{120y}{12}=\frac{48}{3}-\frac{120}{8} \qquad /\ zlomky\ krátíme$$
$$36y-10y=16-15 \qquad /\ upravíme$$
$$26y=1 \qquad /:26$$
$$y=\frac{1}{26}$$

8. Vyřešte následující rovnice.

a) $5-2y=4+3y$

Řešení:

$$5-2y=4+3y \qquad /-3y,-5$$
$$-2y-3y=4-5 \qquad /\ upravíme$$
$$-5y=-1 \qquad /:(-5)$$
$$y=\frac{1}{5}$$

b) $3m+10=2-5m$

Řešení:

$$3m+10=2-5m \qquad /+5m,-10$$
$$3m+5m=2-10 \qquad /\ upravíme$$
$$8m=-8 \qquad /:8$$
$$m=-1$$

c) $2x-3=0,4\cdot(1-2x)-0,6$

Řešení:

$$\begin{aligned}
2x-3&=0,4\cdot(1-2x)-0,6 && /\ \textit{odstraníme závorku}\\
2x-3&=0,4-0,8x-0,6 && /\ \textit{upravíme}\\
2x-3&=-0,2-0,8x && /\ +0,8x,+3\\
2x+0,8x&=-0,2+3 && /\ \textit{upravíme}\\
2,8x&=2,8 && /\ :2,8\\
x&=1
\end{aligned}$$

9. Vyřešte následující rovnice.

a) $3,4y-0,7=1,3-2,6y$

Řešení:

$$\begin{aligned}
3,4y-0,7&=1,3-2,6y && /\ +0,7,+2,6y\\
3,4y+2,6y&=1,3+0,7 && /\ \textit{upravíme}\\
6y&=2 && /\ :6\\
y&=\frac{2}{6} && /\ \textit{zlomek krátíme } 2\\
y&=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

b) $3,11x-5,8=4x+3,1$

Řešení:

$$\begin{aligned}
3,11x-5,8&=4x+3,1 && /\ -4x,+5,8\\
3,11x-4x&=3,1+5,8 && /\ \textit{upravíme}\\
-0,89x&=8,9 && /\ :(-0,89)\\
x&=-10
\end{aligned}$$

10. Vyřešte následující rovnice.

a) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}+\frac{3}{2}$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}-\frac{2}{3}&=\frac{2x}{3}+\frac{3}{2} && /\ \textit{celou rovnici vynásobíme } 6\\
\frac{x}{2}\cdot 6-\frac{2}{3}\cdot 6&=\frac{2x}{3}\cdot 6+\frac{3}{2}\cdot 6 && /\ \textit{násobíme}\\
\frac{6x}{2}-\frac{12}{3}&=\frac{12x}{3}+\frac{18}{2} && /\ \textit{zlomky krátíme}\\
3x-4&=4x+9 && /\ -4x,+4\\
3x-4x&=9+4 && /\ \textit{upravíme}\\
-x&=13 && /\ :(-1)\\
x&=-13
\end{aligned}$$

b) $-\frac{5}{3}+\frac{7n}{8}=\frac{7n}{12}-\frac{5}{2}$

Řešení:

$$\frac{-5}{3}+\frac{7n}{8}=\frac{7n}{12}-\frac{5}{2} \qquad /\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 24$$
$$\frac{-5}{3}\cdot 24+\frac{7n}{8}\cdot 24=\frac{7n}{12}\cdot 24-\frac{5}{2}\cdot 24 \qquad /\ \textit{násobíme}$$
$$-\frac{120}{3}+\frac{168n}{8}=\frac{168n}{12}-\frac{120}{2} \qquad /\ \textit{zlomky krátíme}$$
$$-40+21n=14n-60 \qquad /\ -14n,+40$$
$$21n-14n=-60+40 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$7n=-20 \qquad /\ :7$$
$$n=-\frac{20}{7}$$

11. Vyřešte následující rovnice.

a) $0,3+3,5v=2,6-0,7\cdot(1-5v)$

Řešení:

$$0,3+3,5v=2,6-0,7\cdot(1-5v) \qquad /\ \textit{odstraníme závorku}$$
$$0,3+3,5v=2,6-0,7+3,5v \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0,3+3,5v=1,9+3,5v \qquad /\ -3,5v,-0,3$$
$$3,5v-3,5v=1,9-0,3 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0v=1,6$$

Rovnice nemá řešení, úpravami jsme dospěli k rovnosti, která neplatí.

b) $\frac{x}{3}-2=\frac{x}{3}+\frac{2}{7}$

Řešení:

$$\frac{x}{3}-2=\frac{x}{3}+\frac{2}{7} \qquad /\ \textit{celou rovnici vynásobíme}\ 21$$
$$\frac{x}{3}\cdot 21-2\cdot 21=\frac{x}{3}\cdot 21+\frac{2}{7}\cdot 21 \qquad /\ \textit{násobíme}$$
$$\frac{21x}{3}-42=\frac{21x}{3}+\frac{42}{7} \qquad /\ \textit{zlomky krátíme}$$
$$7x-42=7x+6 \qquad /\ -7x,+42$$
$$7x-7x=6+42 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x=48$$

Rovnice nemá řešení, úpravami jsme dospěli k rovnosti, která neplatí.

12. Řešte následující rovnici:

$$8x-3\cdot(2+2x)=5x+3\cdot(1-x)-9$$

Řešení:

$$\begin{aligned} 8x-3\cdot(2+2x)&=5x+3\cdot(1-x)-9 && \textit{/ odstraníme závorky}\\ 8x-6-6x&=5x+3-3x-9 && \textit{/ upravíme}\\ 2x-6&=2x-6 && /-2x,+6\\ 2x-2x&=-6+6 && \textit{/ upravíme}\\ 0x&=0 \end{aligned}$$

Získali jsme rovnost $0x=0$. Tato rovnost platí pro každé reálné číslo *x*. Řešením zadané rovnice je každé reálné číslo.
Nemůžeme dosadit nekonečně mnoho hodnot, ale můžeme dosadit proměnnou. Za neznámou *x* si dosadíme např. proměnnou *n*:

$x=n,\quad L:\quad 8n-3\cdot(2+2n)=8n-6-6n=2n-6$

$P:\quad 5n+3\cdot(1-n)-9=5n+3-3n-9=2n-6$

$L=P$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí. Řešením zadané rovnice jsou všechna reálná čísla.

13. Řešte následující rovnice.

a) $3u+3-(2+4u)+u=2u-2\cdot(1+u)+3$

Řešení:

$$\begin{aligned} 3u+3-(2+4u)+u&=2u-2\cdot(1+u)+3 && \textit{/ odstraníme závorky}\\ 3u+3-2-4u+u&=2u-2-2u+3 && \textit{/ upravíme}\\ 0u+1&=0u+1 && \textit{/ upravíme}\\ 1&=1 \end{aligned}$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí. Řešením rovnice je každé reálné číslo.

b) $\frac{2c}{3}-\frac{3}{2}=\frac{4}{6}c-\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}$

Řešení:

$$\begin{aligned} \frac{2c}{3}-\frac{3}{2}&=\frac{4c}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2} && \textit{/ násobíme}\\ \frac{2c}{3}-\frac{3}{2}&=\frac{4c}{6}-\frac{6}{4} && \textit{/ zlomky krátíme}\\ \frac{2c}{3}-\frac{3}{2}&=\frac{2c}{3}-\frac{3}{2} && \textit{/ celou rovnici násobíme } 6\\ \frac{2c}{3}\cdot 6-\frac{3}{2}\cdot 6&=\frac{2c}{3}\cdot 6-\frac{3}{2}\cdot 6 && \textit{/ násobíme}\\ \frac{12c}{3}-\frac{18}{2}&=\frac{12c}{3}-\frac{18}{2} && \textit{/ zlomky krátíme}\\ 4c-9&=4c-9 && /-4c,+9\\ 4c-4c&=-9+9 && \textit{/ upravíme}\\ 0c&=0 \end{aligned}$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí. Řešením rovnice je každé reálné číslo.

c) $\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3a}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{2a}{3}\right)-\frac{5}{18}$

Řešení:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3a}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{2a}{3}\right)-\frac{5}{18} \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$\frac{3a}{12}-\frac{1}{9}=\frac{12}{72}+\frac{6a}{24}-\frac{5}{18} \quad \textit{/ zlomky krátíme}$$
$$\frac{a}{4}-\frac{1}{9}=\frac{1}{6}+\frac{a}{4}-\frac{5}{18} \quad \textit{/ celou rovnici vynásobíme } 36$$
$$\frac{a}{4}\cdot 36-\frac{1}{9}\cdot 36=\frac{1}{6}\cdot 36+\frac{a}{4}\cdot 36-\frac{5}{18}\cdot 36 \quad \textit{/ násobíme}$$
$$\frac{36a}{4}-\frac{36}{9}=\frac{36}{6}+\frac{36a}{4}-\frac{5\cdot 36}{18} \quad \textit{/ zlomky krátíme}$$
$$9a-4=6+9a-5\cdot 2 \quad \textit{/ poslední dvojici vynásobíme}$$
$$9a-4=6+9a-10 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$9a-4=-4+9a \quad /-9a,+4$$
$$9a-9a=-4+4 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$0a=0$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí. Řešením rovnice je každé reálné číslo.

14. Řešte následující rovnice.

a) $(2+3u)\cdot(-6)+2u=4u+9-(-3-4u)$

Řešení:

$$(2+3u)\cdot(-6)+2u=4u+9-(-3-4u) \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$-12-18u+2u=4u+9+3+4u \quad \textit{/ upravíme}$$
$$-12-16u=8u+12 \quad /-8u,+12$$
$$-16u-8u=12+12 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$-24u=24 \quad /:(-24)$$
$$u=-1$$

b) $3z-5\cdot(3-2z)=z-3\cdot(4-4z)$

Řešení:

$$3z-5\cdot(3-2z)=z-3\cdot(4-4z) \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$3z-15+10z=z-12+12z \quad \textit{/ upravíme}$$
$$13z-15=13z-12 \quad /-13z,+15$$
$$13z-13z=-12+15 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$0z=3$$

Zadaná rovnice nemá řešení.

c) $-3\cdot(2-2a)-5a=4a-3\cdot(2+a)$

Řešení:

$$-3\cdot(2-2a)-5a=4a-3\cdot(2+a) \quad \textit{/ odstraníme závorku}$$
$$-6+6a-5a=4a-6-3a \quad \textit{/ upravíme}$$
$$-6+a=a-6 \quad /-a,+6$$

$$a - a = -6 + 6 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$0a = 0$$

Zadaná rovnice má řešení pro všechna reálná čísla.

15. Řešte následující rovnice.

a) $1,2 \cdot (u+1) - 0,7 \cdot (2-2u) = 0,5 \cdot (3+5,2u)$

Řešení:

$$\begin{aligned}
1,2 \cdot (u+1) - 0,7 \cdot (2-2u) &= 0,5 \cdot (3+5,2u) && / \textit{ odstraníme závorky} \\
1,2u + 1,2 - 1,4 + 1,4u &= 1,5 + 2,6u && / \textit{ upravíme} \\
2,6u - 0,2 &= 1,5 + 2,6u && / -2,6u; +0,2 \\
2,6u - 2,6u &= 1,5 + 0,2 && / \textit{ upravíme} \\
0u &= 1,7
\end{aligned}$$

Zadaná rovnice nemá řešení.

b) $z + 2 \cdot (2,7 - 0,9) + 0,7z = 3,5 + 3 \cdot (0,2z - 1,5) + 0,8$

Řešení:

$$\begin{aligned}
z + 2 \cdot (2,7 - 0,9) + 0,7z &= 3,5 + 3 \cdot (0,2z - 1,5) + 0,8 && / \textit{ odstraníme závorky} \\
z + 5,4 - 1,8z + 0,7z &= 3,5 + 0,6z - 4,5 + 0,8 && / \textit{ upravíme} \\
-0,1z + 5,4 &= 0,6z - 0,2 && / -0,6z; -5,4 \\
-0,1z - 0,6z &= -0,2 - 5,4 && / \textit{ upravíme} \\
-0,7z &= -5,6 && / : (-0,7) \\
z &= 8
\end{aligned}$$

16. Řešte následující rovnice.

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{2u}{5}\right) = \frac{14}{5} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{5}\right)$

Řešení:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{2u}{5}\right) &= \frac{14}{5} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{5}\right) && / \textit{ odstraníme závorky} \\
\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{2u}{10} &= \frac{14}{5} - \frac{3}{2} + \frac{3u}{5} && / \textit{ krátíme zlomek} \\
\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{u}{5} &= \frac{14}{5} - \frac{3}{2} + \frac{3u}{5} && / \textit{ celou rovnici násobíme } 10 \\
\frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{3}{2} \cdot 10 - \frac{u}{5} \cdot 10 &= \frac{14}{5} \cdot 10 - \frac{3}{2} \cdot 10 + \frac{3u}{5} \cdot 10 && / \textit{ násobíme} \\
\frac{10}{2} + \frac{30}{2} - \frac{10u}{5} &= \frac{140}{5} - \frac{30}{2} + \frac{30u}{5} && / \textit{ zlomky krátíme} \\
5 + 15 - 2u &= 28 - 15 + 6u && / \textit{ upravíme} \\
20 - 2u &= 13 + 6u && / -6u, -20 \\
-2u - 6u &= 13 - 20 && / \textit{ upravíme} \\
-8u &= -7 && / : (-8) \\
u &= \frac{7}{8}
\end{aligned}$$

b) $-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5b}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{6}-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{2b}{3}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

Řešení:

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{5b}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{b}{6}-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{2b}{3}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$

$$\frac{5b}{6}+\frac{1}{4}+\frac{b}{6}-\frac{3}{2}=\frac{6b}{6}-\frac{15}{12} \quad \textit{/ celou rovnici vynásobíme } 12$$

$$\frac{5b}{6}\cdot 12+\frac{1}{4}\cdot 12+\frac{b}{6}\cdot 12-\frac{3}{2}\cdot 12=\frac{6b}{6}\cdot 12-\frac{15}{12}\cdot 12 \quad \textit{/ násobíme}$$

$$\frac{60b}{6}+\frac{12}{4}+\frac{12b}{6}-\frac{36}{2}=\frac{72b}{6}-\frac{180}{12} \quad \textit{/ zlomky krátíme}$$

$$10b+3+2b-18=12b-15 \quad \textit{/ upravíme}$$

$$12b-15=12b-15 \quad /\ -12b, +15$$

$$12b-12b=-15+15 \quad \textit{/ upravíme}$$

$$0b=0$$

Zadaná rovnice má řešení pro všechna reálná čísla.

17. Řešte následující rovnice.

a) $-74a+69\cdot[16-(18a+38)]=1297-87\cdot(35+68a)$

Řešení:

$$-74a+69\cdot[16-(18a+38)]=1297-87\cdot(35+68a)$$

Nejprve budeme postupně odstraňovat závorky:

$$-74a+69\cdot[16-18a-38]=1297-87\cdot(35+68a) \quad \textit{/ upravíme závorku}$$

$$-74a+69\cdot[-22-18a]=1297-87\cdot(35+68a) \quad \textit{/ odstraníme zbylé závorky}$$

$$-74a-1518-1242a=1297-3045-5916a \quad \textit{/ upravíme}$$

$$-1316a-1518=-1748-5916a \quad /\ +5916a, +1518$$

$$-1316a+5916a=-1748+1518 \quad \textit{/ upravíme}$$

$$4600a=-230 \quad /\ :4600$$

$$a=-\frac{230}{4600} \quad \textit{/ zlomek krátíme}$$

$$a=-\frac{1}{20}$$

b) $6986y+13\cdot[228-68\cdot(32y+95)]=526+94\cdot(39-68y)+4252$

Řešení:

$$6986y+13\cdot[228-68\cdot(32y+95)]=526+94\cdot(39-68y)+4252$$

Nejprve odstraníme vnitřní závorku:

$$6986y+13\cdot[228-2176y-6460]=526+94\cdot(39-68y)+4252$$

Upravíme závorku:

$$6986y+13\cdot[-6232-2176y]=526+94\cdot(39-68y)+4252$$

Odstraníme závorky:

$$6986y-81016-28288y=526+3666-6392y+4252$$

Upravíme:

$$
\begin{aligned}
-21302y - 81016 &= 8444 - 6392y && /\ +6392y, +81016 \\
-21302y + 6392y &= 8444 + 81016 && /\ \textit{upravíme} \\
-14910y &= 89460 && /\ :(-14910) \\
y &= -6
\end{aligned}
$$

c) $11 \cdot [4 \cdot (184 + 8z) + 43z] = 777z + 16 \cdot (3z + 564) - 928$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
11 \cdot [4 \cdot (184 + 8z) + 43z] &= 777z + 16 \cdot (3z + 564) - 928 && /\ \textit{odstraníme závorku} \\
11 \cdot [736 + 32z + 43z] &= 777z + 16 \cdot (3z + 564) - 928 && /\ \textit{upravíme závorku} \\
11 \cdot [736 + 75z] &= 777z + 16 \cdot (3z + 564) - 928 && /\ \textit{odstraníme závorky} \\
8096 + 825z &= 777z + 48z + 9024 - 928 && /\ \textit{upravíme} \\
8096 + 825z &= 825z + 8096 && /\ -825z, -8096 \\
825z - 825z &= 8096 - 8096 && /\ \textit{upravíme} \\
0z &= 0
\end{aligned}
$$

Zadaná rovnice má řešení pro všechna reálná čísla

18. Řešte následující rovnice.

a) $2 \cdot (3 - 2x) - 2 \cdot [x - (5 + 2x)] = x \cdot [4 - (3 + 5)] - 2$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (3 - 2x) - 2 \cdot [x - (5 + 2x)] &= x \cdot [4 - (3 + 5)] - 2 && /\ \textit{odstraníme závorky} \\
2 \cdot (3 - 2x) - 2 \cdot [x - 5 - 2x] &= x \cdot [4 - 3 - 5] - 2 && /\ \textit{upravíme závorky} \\
2 \cdot (3 - 2x) - 2 \cdot [-x - 5] &= x \cdot [-4] - 2 && /\ \textit{odstraníme závorky} \\
6 - 4x + 2x + 10 &= -4x - 2 && /\ \textit{upravíme} \\
-2x + 16 &= -4x - 2 && /\ +4x, -16 \\
-2x + 4x &= -2 - 16 && /\ \textit{upravíme} \\
2x &= -18 && /\ :2 \\
x &= -9
\end{aligned}
$$

b) $3 \cdot (b + 5) + [4b - (-1 + 3b)] = 13b - 3 \cdot [2b - 3 \cdot (4 + 3b)]$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
3 \cdot (b + 5) + [4b - (-1 + 3b)] &= 13b - 3 \cdot [2b - 3 \cdot (4 + 3b)] && /\ \textit{odstraníme závorky} \\
3 \cdot (b + 5) + [4b + 1 - 3b] &= 13b - 3 \cdot [2b - 12 - 9b] && /\ \textit{upravíme závorky} \\
3 \cdot (b + 5) + [b + 1] &= 13b - 3 \cdot [-7b - 12] && /\ \textit{odstraníme závorky} \\
3b + 15 + b + 1 &= 13b + 21b + 36 && /\ \textit{upravíme} \\
4b + 16 &= 34b + 36 && /\ -34b, -16 \\
4b - 34b &= 36 - 16 && /\ \textit{upravíme} \\
-30b &= 20 && /\ :(-30) \\
b &= -\frac{20}{30} && /\ \textit{zlomek krátíme} \\
b &= -\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

c) $[(5b-1)-(3b+5)]-2\cdot(5+2b)=[8b-(3+6b)]-4b$

Řešení:

$$
\begin{aligned}
[(5b-1)-(3b+5)]-2\cdot(5+2b) &= [8b-(3+6b)]-4b && \textit{/ odstraníme závorky}\\
[5b-1-3b-5]-2\cdot(5+2b) &= [8b-3-6b]-4b && \textit{/ upravíme závorky}\\
[2b-6]-2\cdot(5+2b) &= [2b-3]-4b && \textit{/ odstraníme závorky}\\
2b-6-10-4b &= 2b-3-4b && \textit{/ upravíme}\\
-2b-16 &= -2b-3 && /\ +2b,+16\\
-2b+2b &= -3+16 && \textit{/ upravíme}\\
0b &= 13
\end{aligned}
$$

Zadaná rovnice nemá řešení.

11.2 Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

1. Řešte dosazovací metodou soustavu rovnic:

$$3x + 2y = 5$$
$$x + 3y = 4$$

Proveďte zkoušku.

Řešení: Při metodě dosazovací vyjádříme z libovolné rovnice jednu neznámou a tuto závislost dosadíme do druhé rovnice.

Vyjádříme si např. x z druhé rovnice:

$$x + 3y = 4 \qquad / -3y$$
$$x = 4 - 3y$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$3x + 2y = 5 \qquad /\ \textit{dosadíme x}$$
$$3 \cdot (4 - 3y) + 2y = 5 \qquad /\ \textit{odstraníme závorku}$$
$$12 - 9y + 2y = 5 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$12 - 7y = 5 \qquad / -12$$
$$-7y = 5 - 12 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$-7y = -7 \qquad / : (-7)$$
$$y = 1$$

Nyní jsme získali jednu neznámou. Tuto neznámou dosadíme do rovnice $x = 4 - 3y$ a vypočítáme hodnotu druhé neznámé:

$$x = 4 - 3y = 4 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$$

Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [1, 1]$. Provedeme si zkoušku, abychom si ověřili, zda jsme počítali správně. Získané hodnoty si dosadíme do obou rovnic. Hodnoty neznámých musí vyhovovat oběma rovnicím.

$$L_1 = 3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$$
$$P_1 = 5,\ L_1 = P_1$$

První rovnici hodnoty vyhovují.

$$L_2 = x + 3y = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$
$$P_2 = 4,\ L_2 = P_2$$

Druhé rovnici získané hodnoty také vyhovují, úloha je vyřešena.

2. Řešte dosazovací metodou následující soustavy rovnic.

a) $5x - 9y = 6$

$x = y + 2$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$5x - 9y = 6 \qquad /\ \textit{dosadíme x}$$
$$5 \cdot (y + 2) - 9y = 6 \qquad /\ \textit{odstraníme závorku}$$
$$5y + 10 - 9y = 6 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$-4y + 10 = 6 \qquad / -10$$
$$-4y = 6 - 10 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$-4y = -4 \qquad / : (-4)$$
$$y = 1$$

Dosazením do druhé rovnice získáme druhou proměnou:

$$x = y + 2 \qquad / \textit{ dosadíme } y$$
$$x = 1 + 2 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$x = 3$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [3, 1]$.

b) $x = 2y + 3$
$-4x + 5y = 0$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do druhé rovnice:

$$-4x + 5y = 0 \qquad / \textit{ dosadíme } x$$
$$-4 \cdot (2y + 3) + 5y = 0 \qquad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$-8y - 12 + 5y = 0 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-3y - 12 = 0 \qquad / +12$$
$$-3y = 12 \qquad / : (-3)$$
$$y = -4$$

Dosazením do první rovnice získáme druhou proměnou:

$$x = 2y + 3 \qquad / \textit{ dosadíme } y$$
$$x = 2 \cdot (-4) + 3 \qquad / \textit{ násobíme}$$
$$x = -8 + 3 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$x = -5$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-5, 4]$.

3. Řešte dosazovací metodou následující soustavy rovnic.

a) $5x + 3y = -4$
$-3x - y = 4$

Z libovolné rovnice si vyjádříme neznámou. Vyjádříme si např. z druhé rovnice neznámou *y*:

$$-3x - y = 4$$
$$-y = 4 + 3x$$
$$y = -4 - 3x$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$5x + 3y = -4 \qquad / \textit{ dosadíme za } y$$
$$5x + 3 \cdot (-4 - 3x) = -4 \qquad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$5x - 12 - 9x = -4 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-4x - 12 = -4 \qquad / +12$$
$$-4x = -4 + 12 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-4x = 8 \qquad / : (-4)$$
$$x = -2$$

Dosazením do vyjádřeného *y* získáme hodnotu této proměnné:

$$y = -4 - 3x$$
$$y = -4 - 3 \cdot (-2)$$
$$y = -4 + 6$$
$$y = 2$$

Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-2, 2]$.

b) $2x + 7y = -2$
$x + 3y = 3$

Z libovolné rovnice si vyjádříme neznámou. Vyjádříme si např. z druhé rovnice neznámou *x*:

$$x + 3y = 3$$
$$x = 3 - 3y$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$
\begin{aligned}
2x + 7y &= -2 && \textit{/ dosadíme za x}\\
2 \cdot (3 - 3y) + 7y &= -2 && \textit{/ odstraníme závorku}\\
6 - 6y + 7y &= -2 && \textit{/ upravíme}\\
6 + y &= -2 && / -6\\
y &= -2 - 6 && \textit{/ upravíme}\\
y &= -8
\end{aligned}
$$

Dosazením do vyjádřeného *x* získáme hodnotu této proměnné:

$$
\begin{aligned}
x &= 3 - 3y && \textit{/ dosadíme y}\\
x &= 3 - 3 \cdot (-8) && \textit{/ násobíme}\\
x &= 3 + 24 && \textit{/ upravíme}\\
x &= 27
\end{aligned}
$$

Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [27, -8]$.

4. Vyřešte sčítací metodou zadanou soustavu rovnic:

$$4x + 5y = 3$$
$$2x - 5y = 9$$

Proveďte zkoušku.

Řešení: Při metodě sčítací využíváme porovnání součtu výrazů na levých a pravých stranách obou rovnic za účelem vyrušení jedné neznámé. Vytvoříme takové násobky obou rovnic, abychom po sečtení jejich levých a pravých stran získali novou rovnici, která obsahuje pouze jednu neznámou.

$$4x + 5y = 3$$
$$2x - 5y = 9$$

Po sečtení těchto dvou rovnic, získáme jednu rovnici.

$$
\begin{aligned}
4x + 2x + 5y - 5y &= 3 + 9 && \textit{/ upravíme}\\
6x &= 3 + 9 && \textit{/ upravíme}\\
6x &= 12 && / : 6\\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Sečtením zadaných rovnic jsme získali jednu rovnici s jednou neznámou. Pomocí ekvivalentních úprav jsme získali hodnotu neznámé *x*. Nyní musíme vypočítat zbývající hodnotu *y*.

Vypočítanou hodnotu *x* dosadíme do libovolné rovnice ze zadání a tím vypočítáme hodnotu neznámé *y*. Dosadíme např. do první rovnice:

$$
\begin{aligned}
4x + 5y &= 3 && \textit{/ dosadíme x}\\
4 \cdot 2 + 5y &= 3 && \textit{/ násobíme}\\
8 + 5y &= 3 && / -8\\
5y &= 3 - 8 && \textit{/ upravíme}\\
5y &= -5 && / : 5\\
y &= -1
\end{aligned}
$$

Nyní jsme získali hodnotu druhé neznámé. Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [2, -1]$. Provedeme si zkoušku, abychom si ověřili, zda jsme počítali správně:

$$L_1 = 4x + 5y = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 8 - 5 = 3$$
$$P_1 = 3, L_1 = P_1$$

První rovnici získané hodnoty vyhovují.

$$L_2 = 2x - 5y = 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = 4 + 5 = 9$$
$$P_2 = 9, L_2 = P_2$$

Druhé rovnici hodnoty také vyhovují, soustavu jsme vyřešili správně.

5. Pomocí sčítací metody vyřešte následující soustavy rovnic.

a) $x + 5y = -2$
$-x - 6y = 3$

Sečteme následující rovnice:

$$x + 5y = -2$$
$$-x - 6y = 3$$

Sečtením získáme jednu rovnici a vypočítáme neznámou y:

$$x - x + 5y - 6y = -2 + 3 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$-y = 1 \quad / : (-1)$$
$$y = -1$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$x + 5y = -2 \quad / \textit{ dosadíme } y$$
$$x + 5 \cdot (-1) = -2 \quad / \textit{ násobíme}$$
$$x - 5 = -2 \quad / +5$$
$$x = -2 + 5 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$x = 3$$

Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [3, -1]$.

b) $4x + 2y = 22$
$3y - 4x = 3$

Sečteme následující rovnice:

$$4x + 2y = 22$$
$$3y - 4x = 3$$

Sečtením získáme jednu rovnici:

$$4x - 4x + 2y + 3y = 22 + 3 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$5y = 25 \quad / : 5$$
$$y = 5$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$4x + 2y = 22 \quad / \textit{ dosadíme } y$$
$$4x + 2 \cdot 5 = 22 \quad / \textit{ násobíme}$$
$$4x + 10 = 22 \quad / -10$$
$$4x = 22 - 10 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$4x = 12 \quad / : 4$$
$$x = 3$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [3, 5]$.

6. Pomocí sčítací metody vyřešte následující soustavy rovnic.

a) $4x + 2y = 4$
$3x - y = 8$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámou:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 \\ 3x - y &= 8 \quad / \cdot 2 \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 \\ 6x - 2y &= 16 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$\begin{aligned} 4x + 6x + 2y - 2y &= 4 + 16 && / \textit{ upravíme} \\ 10x &= 20 && / :10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 4 && / \textit{ dosadíme } x \\ 4 \cdot 2 + 2y &= 4 && / \textit{ násobíme} \\ 8 + 2y &= 4 && / -8 \\ 2y &= 4 - 8 && / \textit{ upravíme} \\ 2y &= -4 && / : 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Řešením zadané soustavy je uspořádaná dvojice $[x, y] = [2, -2]$.

b) $3x - 5y = 8$
$x - 3y = 8$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 8 \\ x - 3y &= 8 \quad / \cdot (-3) \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 8 \\ -3x + 9y &= -24 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$\begin{aligned} 3x - 3x - 5y + 9y &= 8 - 24 && / \textit{ upravíme} \\ 4y &= -16 && / : 4 \\ y &= -4 \end{aligned}$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$\begin{aligned} x - 3y &= 8 && / \textit{ dosadíme } y \\ x - 3 \cdot (-4) &= 8 && / \textit{ násobíme} \\ x + 12 &= 8 && / -12 \\ x &= 8 - 12 && / \textit{ upravíme} \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Řešením zadané soustavy rovnice je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-4, -4]$.

7. Pomocí sčítací metody vyřešte následující soustavy rovnic.
   a) $3x - 2y = 5$
      $2x - 3y = -10$
      Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámou:
      $$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 && / \cdot (-2) \\ 2x - 3y &= -10 && / \cdot 3 \end{aligned}$$
      Rovnici upravíme:
      $$\begin{aligned} -6x + 4y &= -10 \\ 6x - 9y &= -30 \end{aligned}$$
      Rovnice můžeme sečíst:
      $$\begin{aligned} -6x + 6x + 4y - 9y &= -10 - 30 && /\ \textit{upravíme} \\ -5y &= -40 && / : (-5) \\ y &= 8 \end{aligned}$$
      Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:
      $$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 && /\ \textit{dosadíme } y \\ 3x - 2 \cdot 8 &= 5 && /\ \textit{násobíme} \\ 3x - 16 &= 5 && / +16 \\ 3x &= 5 + 16 && /\ \textit{upravíme} \\ 3x &= 21 && / : 3 \\ x &= 7 \end{aligned}$$
      Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [7, 8]$.

   b) $5x + 4y = -6$
      $3x + 3y = 9$
      Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:
      $$\begin{aligned} 5x + 4y &= -6 && / \cdot (-3) \\ 3x + 3y &= 9 && / \cdot 4 \end{aligned}$$
      Rovnici upravíme:
      $$\begin{aligned} -15x - 12y &= 18 \\ 12x + 12y &= 36 \end{aligned}$$
      Rovnice nyní můžeme sečíst:
      $$\begin{aligned} -15x + 12x - 12y + 12y &= 18 + 36 && /\ \textit{upravíme} \\ -3x &= 54 && / : (-3) \\ x &= -18 \end{aligned}$$
      Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:
      $$\begin{aligned} 5x + 4y &= -6 && /\ \textit{dosadíme } x \\ 5 \cdot (-18) + 4y &= -6 && /\ \textit{násobíme} \\ -90 + 4y &= -6 && / +90 \\ 4y &= -6 + 90 && /\ \textit{upravíme} \\ 4y &= 84 && / : 4 \\ y &= 21 \end{aligned}$$
      Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x, y] = [-18, 21]$.

8. Vyřešte soustavu rovnic:

$$6x + 2y = 6$$
$$9x + 3y = 9$$

Řešení: Zadanou soustavu rovnic si vyřešíme jak metodou sčítací, tak i metodou dosazovací.

1. Tuto zadanou soustavu rovnic budeme řešit sčítací metodou. Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$6x + 2y = 6 \quad / \cdot (-3)$$
$$9x + 3y = 9 \quad / \cdot 2$$

Rovnici upravíme:

$$-18x - 6y = -18$$
$$18x + 6y = 18$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-18x + 18x - 6y + 6y = -18 + 18 \quad / \, upravíme$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí nezávisle na hodnotách neznámých. Zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení. To ale neznamená, že řešením je jakákoliv libovolná uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Vyjádříme si jednu neznámou v závislosti na druhé.

$$6x + 2y = 6$$
$$2y = 6 - 6x \quad / : 2$$
$$y = 3 - 3x$$

Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y]$ tvaru $[x, 3 - 3x]$

Poznámka: Rovnici si můžeme upravit i jinak. První rovnici můžeme celou vydělit 2 a druhou rovnici můžeme vydělit celou 3. Pak dostaneme:

$$3x + y = 3$$
$$3x + y = 3$$

Vidíme, že jsme dostali totožné rovnice. Pokud jsou rovnice totožné, zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Toto tvrzení si uvěříme. Rovnice si upravíme tak, abychom je mohli sečíst a získat tak jednu rovnici s jednou neznámou:

$$3x + y = 3 \quad / \cdot (-1)$$
$$3x + y = 3$$

Upravíme:

$$-3x - y = -3$$
$$3x + y = 3$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-3x + 3x - y + y = -3 + 3 \qquad / \, upravíme$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí. Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. To ale neznamená, že řešením je jakákoliv libovolná uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Vyjádříme si jednu neznámou pomocí druhé:

$$3x + y = 3$$
$$y = 3 - 3x$$

Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y]$ tvaru $[x, 3 - 3x]$.

2. Tuto soustavu rovnic vyřešíme metodou dosazovací. Nejdříve si musíme z jedné z rovnic vyjádřit libovolnou neznámou. Z první rovnice si vyjádříme např. *y*:

$$6x + 2y = 6 \qquad / -6x$$
$$2y = 6 - 6x \qquad / : 2$$
$$y = 3 - 3x$$

Vyjádřenou neznámou dosadíme do druhé rovnice:

$$9x + 3y = 9 \qquad / \textit{ dosadíme y}$$
$$9x + 3 \cdot (3 - 3x) = 9 \qquad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$9x + 9 - 9x = 9 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 9 = 9 \qquad / \quad -9$$
$$0x = 9 - 9 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$0x = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, která platí nezávisle na hodnotách neznámých. Zadaná soustava má nekonečně mnoho řešení. To ale neznamená, že řešením je jakákoliv libovolná uspořádaná dvojice $[x, y]$.

Vyjádříme si jednu neznámou v závislosti na druhé:

$$6x + 2y = 6$$
$$2y = 6 - 6x \qquad / : 2$$
$$y = 3 - 3x$$

Řešením je tedy každá uspořádaná dvojice $[x, y]$ tvaru $[x, 3 - 3x]$.

9. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $12x + 6y = 3$
$-4x - 2y = -1$

Tuto rovnici vyřešíme sčítací metodou. Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$12x + 6y = 3$$
$$-4x - 2y = -1 \qquad / \cdot 3$$

Rovnici upravíme:

$$12x + 6y = 3$$
$$-12x - 6y = -3$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$12x - 12x + 6y - 6y = 3 - 3 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, nyní nalezneme uspořádanou dvojici. Vyjádříme si jednu z neznámých:

$$-4x - 2y = -1$$
$$-2y = -1 + 4x \qquad / : (-2)$$

$$y=\frac{1-4x}{2}$$

Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x,\ y]=\left[x,\ \frac{1-4x}{2}\right]$.

b) $14x-7y=-21$
$-12x+6y=18$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} 14x-7y&=-21 \quad / \cdot 6 \\ -12x+6y&=18 \quad / \cdot 7 \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 84x-42y&=-126 \\ -84x+42y&=126 \end{aligned}$$

Rovnice nyní můžeme sečíst:

$$84x-84x-42y+42y=-126+126 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x+0y=0$$

Dospěli jsme k rovnosti, nalezneme uspořádanou dvojici. Vyjádříme si jednu z neznámých:

$$\begin{aligned} 14x-7y&=-21 \\ -7y&=-21-14x \quad / : (-7) \\ y&=3+2x \end{aligned}$$

Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x,y]=[x,3+2x]$.

10. Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 9x-12y&=4 \\ -6x+8y&=-2 \end{aligned}$$

Řešení:

1. Tuto rovnici vyřešíme sčítací metodou. Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} 9x-12y&=4 \quad / \cdot 2 \\ -6x+8y&=-2 \quad / \cdot 3 \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 18x-24y&=8 \\ -18x+24y&=-6 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$18x-18x-24y+24y=8-6 \quad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x+0y=2$$

Získali jsme rovnost, která neplatí. Zadaná soustava nemá řešení.

2. Tuto soustavu rovnic vyřešíme metodou dosazovací. Nejdříve si musíme z jedné z rovnic vyjádřit libovolnou neznámou. Z druhé rovnice si vyjádříme například *y*:

$$-6x+8y=-2 \qquad / +6x$$
$$8y=-2+6x \qquad / :8$$
$$y=\frac{-2+6x}{8}$$

Tuto vyjádřenou neznámou dosadíme do první rovnice:

$$9x-12y=4 \qquad /\ \textit{dosadíme } y$$
$$9x-12\cdot\left(\frac{-2+6x}{8}\right)=4 \qquad /\ \textit{odstraníme závorku}$$
$$9x+\frac{24-72x}{8}=4 \qquad /\ \textit{celou rovnici násobíme } 8$$
$$9x\cdot 8+\frac{24-72x}{8}\cdot 8=4\cdot 8 \qquad /\ \textit{krátíme}$$
$$9x\cdot 8+24-72x=4\cdot 8 \qquad /\ \textit{násobíme}$$
$$72x+24-72x=32 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x+24=32 \qquad / -24$$
$$0x=32-24 \qquad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x=8$$

Získali jsme rovnost, která neplatí. Zadaná soustava nemá řešení.

11. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $x-2y=6$
$2x-4y=13$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$x-2y=6 \qquad / \cdot(-2)$$
$$2x-4=13$$

Rovnici upravíme:

$$-2x+4y=-12$$
$$2x-4y=13$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-2x+2x+4y-4y=-12+13 \quad /\ \textit{upravíme}$$
$$0x+0y=1$$

Zadaná soustava nemá řešení.

b) $4x-8y=-19$
$-3x+6y=11$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$4x-8y=-19 \qquad / \cdot 3$$
$$-3x+6y=11 \qquad / \cdot 4$$

Rovnici upravíme:

$$12x-24y=-57$$
$$-12x+24y=44$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$12x - 12x - 24y + 24y = -57 + 44 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 0y = -13$$

Zadaná soustava nemá řešení.

12. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $7x + 4y = 4$
$9x - 2y = 8$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$7x + 4y = 4$$
$$9x - 2y = 8 \quad / \cdot 2$$

Rovnici upravíme:

$$7x + 4y = 4$$
$$18x - 4y = 16$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$7x + 18x + 4y - 4y = 4 + 16 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$25x = 20 \qquad / : 25$$
$$x = \frac{20}{25} \qquad / \textit{ zlomek krátíme}$$
$$x = \frac{4}{5}$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$7x + 4y = 4 \qquad / \textit{ dosadíme x}$$
$$7 \cdot \frac{4}{5} + 4y = 4 \qquad / \textit{ násobíme}$$
$$\frac{28}{5} + 4y = 4 \qquad / \textit{ celou rovnici násobíme } 5$$
$$28 + 4y \cdot 5 = 4 \cdot 5 \qquad / \textit{ násobíme}$$
$$28 + 20y = 20 \qquad / -28$$
$$20y = 20 - 28 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$20y = -8 \qquad / : 20$$
$$y = -\frac{8}{20} \qquad / \textit{ zlomek krátíme}$$
$$y = -\frac{2}{5}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right]$.

b) $5x + 2y = -3$
$-15x - 6y = 9$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$5x + 2y = -3 \quad / \cdot 3$$
$$-15x - 6y = 9$$

Rovnici upravíme:

$$15x + 6y = -9$$
$$-15x - 6y = 9$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$15x - 15x + 6y - 6y = -9 + 9 \quad / \ \textit{upravíme}$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, nalezneme uspořádanou dvojici. Vyjádříme si jednu z neznámých:

$$5x + 2y = -3$$
$$5x = -3 - 2y \quad / :5$$
$$x = \frac{-3 - 2y}{5}$$

Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[\frac{-3-2y}{5}, y\right]$.

13. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $x + \frac{1}{2}y = 5$
$12x - y = 4$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$x + \frac{1}{2}y = 5 \quad / \cdot 2$$
$$12x - y = 4$$

Rovnici upravíme:

$$2x + y = 10$$
$$12x - y = 4$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$2x + 12x + y - y = 10 + 4 \quad / \ \textit{upravíme}$$
$$14x = 14 \quad / :14$$
$$x = 1$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$12x - y = 4 \quad / \ \textit{dosadíme } x$$
$$12 \cdot 1 - y = 4 \quad / \ \textit{násobíme}$$
$$12 - y = 4 \quad / -12$$
$$-y = 4 - 12 \quad / \ \textit{upravíme}$$
$$-y = -8 \quad / :(-1)$$
$$y = 8$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = [1, 8]$.

b) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y = 2$
$x + y = \frac{5}{4}$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}y = 2 \quad / \textit{ celou rovnici násobíme } 3$$

$$x + y = \frac{5}{4} \quad / \textit{ celou rovnici násobíme } 4$$

$$\frac{2x}{3} \cdot 3 - \frac{5y}{3} \cdot 3 = 2 \cdot 3 \quad / \textit{ násobíme}$$

$$4x + 4y = \frac{5}{4} \cdot 4 \quad / \textit{ násobíme}$$

$$\frac{6x}{3} - \frac{15y}{3} = 6 \quad / \textit{ krátíme}$$

$$4x + 4y = \frac{20}{4} \quad / \textit{ krátíme}$$

$$2x - 5y = 6$$
$$4x + 4y = 5$$

Rovnici upravíme:

$$2x - 5y = 6 \quad / \cdot (-2)$$
$$4x + 4y = 5$$

Po upravení:

$$-4x + 10y = -12$$
$$4x + 4y = 5$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-4x + 4x + 10y + 4y = -12 + 5 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$14y = -7 \quad / : 14$$

$$y = -\frac{7}{14} \quad / \textit{ zlomek krátíme}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$2x - 5y = 6 \quad / \textit{ dosadíme } y$$

$$2x - 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 6 \quad / \textit{ násobíme}$$

$$2x + \frac{5}{2} = 6 \quad / \textit{ celou rovnici násobíme } 2$$

$$2x \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot 2 = 6 \cdot 2 \quad / \textit{ násobíme}$$

$$4x + \frac{10}{2} = 12 \quad / \textit{ krátíme}$$

$$4x + 5 = 12 \quad / -5$$

$$4x = 12 - 5 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$4x = 7 \quad / : 4$$

$$x = \frac{7}{4}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right]$.

14. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $2,4x + 3,2y = -2$
$-7,2x - 9,6y = 1$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} 2,4x + 3,2y &= -2 \quad / \cdot 3 \\ -7,2x - 9,6y &= 1 \end{aligned}$$

Rovnici upravíme:

$$\begin{aligned} 7,2x + 9,6y &= -6 \\ -7,2x - 9,6y &= 1 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$7,2x - 7,2x + 9,6y - 9,6y = -6 + 1 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 0y = -5$$

Zadaná soustava nemá řešení.

b) $2,1x - 4,2y = 10,8$
$3,5x - 7y = 18$

Nejdříve si musíme rovnice upravit tak, abychom po jejich sečtení získali rovnici o jedné neznámé:

$$\begin{aligned} 2,1x - 4,2y &= 10,8 \\ 3,5x - 7y &= 18 \quad / \cdot (-0,6) \end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} 2,1x - 4,2y &= 10,8 \\ -2,1x + 4,2y &= -10,8 \end{aligned}$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$2,1x - 2,1x - 4,2y + 4,2y = 10,8 - 10,8 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, nalezneme uspořádanou dvojici. Vyjádříme si jednu z neznámých:

$$\begin{aligned} 2,1x - 4,2y &= 10,8 \\ 2,1x &= 10,8 + 4,2y \quad / : 2,1 \\ x &= \frac{10,8 + 4,2y}{2,1} \\ x &= \frac{108 + 42y}{21} \\ x &= \frac{36 + 14y}{7} \end{aligned}$$

Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[\frac{36 + 14y}{7}, y\right]$.

15. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $1,8x-2y=-2\cdot(y-0,9x)+1$

$4x+1,6y=0$

Nejdříve si upravíme první rovnici:

$$1,8x-2y=-2\cdot(y-0,9x)+1 \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$1,8x-2y=-2y+1,8x+1 \quad / +2y,-1,8x$$
$$1,8x-1,8x-2y+2y=1 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$0x+0y=1$$

Zadaná soustava rovnic nemá řešení. Při úpravě první rovnice jsme dospěli k rovnosti, která neplatí.

b) $x+\frac{1}{5}\cdot(y-1)=\frac{1}{6}\cdot(x+y)$

$\frac{1}{5}y-0,5-3x=-\frac{1}{7}y+4x$

Nejprve si rovnice upravíme:

$$x+\frac{1}{5}\cdot(y-1)=\frac{1}{6}\cdot(x+y) \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$\frac{1}{5}y-0,5-3x=-\frac{1}{7}y+4x \quad \textit{/ celou rovnici násobíme } 35$$

$$x+\frac{1}{5}y-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}y \quad \textit{/ celou rovnici násobíme } 30$$
$$\frac{1y}{5}\cdot 35-0,5\cdot 35-3x\cdot 35=-\frac{1y}{7}\cdot 35+4x\cdot 35 \quad \textit{/ násobíme}$$

$$30x+\frac{1y}{5}\cdot 30-\frac{1}{5}\cdot 30=\frac{1x}{6}\cdot 30+\frac{1y}{6}\cdot 30 \quad \textit{/ násobíme}$$
$$\frac{35y}{5}-17,5-105x=-\frac{35y}{7}+140x \quad \textit{/ krátíme}$$

$$30x+\frac{30y}{5}-\frac{30}{5}=\frac{30x}{6}+\frac{30y}{6} \quad \textit{/ krátíme}$$
$$7y-17,5-105x=-5y+140x \quad / +5y;-140\text{y};+17,5$$

$$30x+6y-6=5x+5y \quad / -5x,-5y,+6$$
$$7y+5y-105x-140x=17,5 \quad \textit{/ upravíme}$$

$$30x+6y-5x-5y=6 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$12y-245x=17,5$$

$$25x+y=6 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$12y-245x=17,5$$

Nyní si rovnice upravíme na tvar, abychom je mohli sečíst:

$$25x+y=6 \quad /\cdot(-12)$$
$$-245x+12y=17,5$$

Upravíme:

$$-300x-12y=-72$$
$$-245x+12y=17,5$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$-300x-245x-12y+12y=-72+17,5 \quad / \ upravíme$$
$$-545x=-54,5 \quad / :(-545)$$
$$x=0,1$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$25x+y=6$$
$$25\cdot 0,1+y=6 \quad / \ násobíme$$
$$2,5+y=6 \quad / -2,5$$
$$y=6-2,5 \quad / \ upravíme$$
$$y=3,5$$

Řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x,y]=[0,1;3,5]$.

16. Řešte následující soustavy rovnic.

a) $(4x+3y)+2\cdot(3x+y)=2-[-3\cdot(y+2x)]+y$
$2\cdot[2x+(3x+3y-3)]=6+6x-2\cdot(4x-2y)$

Nejprve si rovnice upravíme:

$$(4x+3y)+2\cdot(3x+y)=2-[-3\cdot(y+2x)]+y \quad / \ odstraníme\ závorku$$
$$2\cdot[2x+(3x+3y-3)]=6+6x-2\cdot(4x-2y) \quad / \ odstraníme\ závorku$$

$$(4x+3y)+2\cdot(3x+y)=2-[-3y-6x]+y \quad / \ odstraníme\ závorky$$
$$2\cdot[2x+3x+3y-3]=6+6x-2\cdot(4x-2y) \quad / \ upravíme\ závorku$$

$$4x+3y+6x+2y=2+3y+6x+y \quad / \ upravíme$$
$$2\cdot[5x+3y-3]=6+6x-2\cdot(4x-2y) \quad / \ odstraníme\ závorky$$

$$10x+5y=2+4y+6x \quad / -4y,-6x$$
$$10x+6y-6=6+6x-8x+4y \quad / \ upravíme$$

$$10x-6x+5y-4y=2 \quad / \ upravíme$$
$$10x+6y-6=6-2x+4y \quad / +2x,-4y,+6$$

$$4x+y=2$$
$$10x+2x+6y-4y=6+6 \quad / \ upravíme$$

$$4x+y=2$$
$$12x+2y=12 \quad / \ upravíme$$

Nyní si rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$4x+y=2 \quad / \cdot(-2)$$
$$12x+2y=12$$

Upravíme:

$$-8x-2y=-4$$
$$12x+2y=12$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$-8x+12x-2y+2y=-4+12 \quad / \ upravíme$$
$$4x=8 \quad / :4$$
$$x=2$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$4x+y=2 \quad / \ dosadíme\ x$$
$$4\cdot 2+y=2 \quad / \ násobíme$$
$$8+y=2 \quad / -8$$

$$y = 2 - 8 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$y = -6$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = [2, -6]$.

b) $1,2 \cdot [-y - (-0,5 + x)] = 7 \cdot (0,3x - 0,2y) + 5$
$3,1 - 6,1y + 2 \cdot (1,5y - 1) = 1,1 \cdot [3 + 2x - (3y - x - 2)]$

Nejprve si rovnice upravíme:

$$1,2 \cdot [-y - (-0,5 + x)] = 7 \cdot (0,3x - 0,2y) + 5 \quad / \textit{ odstraníme závorku}$$
$$3,1 - 6,1y + 2 \cdot (1,5y - 1) = 1,1 \cdot [3 + 2x - (3y - x - 2)] \quad / \textit{ odstraníme závorku}$$

$$1,2 \cdot [-y + 0,5 - x] = 7 \cdot (0,3x - 0,2y) + 5 \quad / \textit{ odstraníme závorky}$$
$$3,1 - 6,1y + 2 \cdot (1,5y - 1) = 1,1 \cdot [3 + 2x - 3y + x + 2] \quad / \textit{ upravíme závorku}$$

$$-1,2y + 0,6 - 1,2x = 2,1x - 1,4y + 5 \quad / -2,1x, +1,4y - 0,6$$
$$3,1 - 6,1y + 2 \cdot (1,5y - 1) = 1,1 \cdot [3x - 3y + 5] \quad / \textit{ odstraníme závorky}$$

$$-1,2y + 1,4y - 1,2x - 2,1x = 5 - 0,6 \quad / \textit{ ,upravíme}$$
$$3,1 - 6,1y + 3y - 2 = 3,3x - 3,3y + 5,5 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$0,2y - 3,3x = 4,4$$
$$1,1 - 3,1y = 3,3x - 3,3y + 5,5 \quad / -3,3x; +3,3y; -1,1$$

$$0,2y - 3,3x = 4,4$$
$$-3,1y + 3,3y - 3,3x = 5,5 - 1,1 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$-3,3x + 0,2y = 4,4$$
$$0,2y - 3,3x = 4,4$$

Nyní si rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$-3,3x + 0,2y = 4,4 \quad / \cdot (-1)$$
$$0,2y - 3,3x = 4,4$$

Upravíme:

$$3,3x - 0,2y = -4,4$$
$$0,2y - 3,3x = 4,4$$

Nyní můžete rovnice sečíst:

$$3,3x - 3,3x - 0,2y + 0,2y = -4,4 + 4,4 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$0x + 0y = 0$$

Dospěli jsme k rovnosti, nalezneme uspořádanou dvojici. Vyjádříme si jednu z neznámých:

$$0,2y - 3,3x = 4,4$$
$$0,2y = 4,4 + 3,3x \quad / : (0,2)$$
$$y = \frac{4,4 + 3,3x}{0,2}$$
$$y = \frac{44 + 33x}{2}$$

Zadaná soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Řešením je každá uspořádaná dvojice $[x, y] = \left[x, \frac{44 + 33x}{2}\right]$.

c) $$\begin{aligned} \frac{1}{7}\cdot(x-15)+\frac{1}{6}\cdot(12-y)&=-\frac{1}{7}-y-(15-x)\\ -2\cdot\left(7-\frac{1}{5}x\right)+10-y&=-4\cdot[15-(x-y-4)] \end{aligned}$$

Nejprve si rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}\cdot(x-15)+\frac{1}{6}\cdot(12-y)&=-\frac{1}{7}-y-(15-x) && /\ \textit{odstraníme závorky}\\ -2\cdot\left(7-\frac{1}{5}x\right)+10-y&=-4\cdot[15-(x-y-4)] && /\ \textit{odstraníme závorku} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}x-\frac{15}{7}+\frac{12}{6}-\frac{y}{6}&=-\frac{1}{7}-y-15+x && /\ \textit{krátíme zlomek}\\ -2\cdot\left(7-\frac{1}{5}x\right)+10-y&=-4\cdot[15-x+y+4] && /\ \textit{upravíme závorku} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7}x-\frac{15}{7}+2-\frac{y}{6}&=-\frac{1}{7}-y-15+x && /\ \textit{celou rovnici vynásobíme } 42\\ -2\cdot\left(7-\frac{1}{5}x\right)+10-y&=-4\cdot[19-x+y] && /\ \textit{odstraníme závorky} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1x}{7}\cdot 42-\frac{15}{7}\cdot 42+2\cdot 42-\frac{y}{6}\cdot 42&=-\frac{1}{7}\cdot 42-42y-15\cdot 42+42x && /\ \textit{násobíme}\\ -14+\frac{2}{5}x+10-y&=-76+4x-4y && /\ \textit{celou rovnici vynásobíme } 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{42x}{7}-\frac{630}{7}+84-\frac{42y}{6}&=-\frac{42}{7}-42y-630+42x && /\ \textit{krátíme zlomky}\\ -14\cdot 5+\frac{2x}{5}\cdot 5+10\cdot 5-5y&=-76\cdot 5+4x\cdot 5-4y\cdot 5 && /\ \textit{násobíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x-90+84-7y&=-6-42y-630+42x && /\ \textit{upravíme}\\ -70+\frac{10x}{5}+50-5y&=-380+20x-20y && /\ \textit{zlomek krátíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x-6-7y&=-636-42y+42x && /+42y,-42x,+6\\ -70+2x+50-5y&=-380+20x-20y && /\ \textit{upravíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x-42x-7y+42y&=-636+6 && /\ \textit{upravíme}\\ -70+2x+50-5y&=-380+20x-20y && /\ \textit{upravíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -36x+35y&=-630\\ -20+2x-5y&=-380+20x-20y && /-20x,+20y,+20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -36x+35y&=-630\\ 2x-20x-5y+20y&=-380+20 && /\ \textit{upravíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -36x+35y&=-630\\ -18x+15y&=-360 \end{aligned}$$

Nyní si rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned} -36x+35y&=-630\\ -18x+15y&=-360 && /\cdot(-2) \end{aligned}$$

Upravíme:

$$-36x + 35y = -630$$
$$36x - 30y = 720$$

Nyní můžete rovnice sečíst:

$$-36x + 36x + 35y - 30y = -630 + 720 \quad / \; upravíme$$
$$5y = 90 \quad / : 5$$
$$y = 18$$

Získanou neznámou dosadíme do libovolné rovnice:

$$36x - 30y = 720 \quad / \; dosadíme\ y$$
$$36x - 30 \cdot 18 = 720 \quad / \; násobíme$$
$$36x - 540 = 720 \quad / + 540$$
$$36x = 720 + 540 \quad / \; upravíme$$
$$36x = 1260 \quad / : 36$$
$$x = 35$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x, y] = [35, 18]$.

11.3 Grafické řešení lineárních rovnic

1. Graficky řešte následující lineární rovnici:

$$x-3=2x.$$

Pravou a levou stranu rovnice převedeme na tvary lineárních funkcí.
Pravé straně rovnice odpovídá lineární funkce:

$$f: \quad y=x-3$$

Levé straně rovnice odpovídá lineární funkce:

$$g: \quad y=2x$$

Grafem každé lineární funkce je přímka. Pro sestrojení přímky nám postačí zjistit souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
Nejprve si vytvoříme tabulku, do které zaznamenáme *x*-ové a *y*-ové souřadnice dvou bodů, kterýma přímka prochází. *X*-ovou souřadnici si zvolíme libovolně a *y*-ovou dopočítáme dosazením *x*-ové souřadnice do lineární funkce.

x	0	1
$y = x - 3$	–3	–2

Pro $x=0$:

$$f: \quad y=x-3$$
$$y=0-3$$
$$y=-3$$

Pro $x=1$:

$$g: \quad y=x-3$$
$$y=1-3$$
$$y=-2$$

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Pro $x=0$:

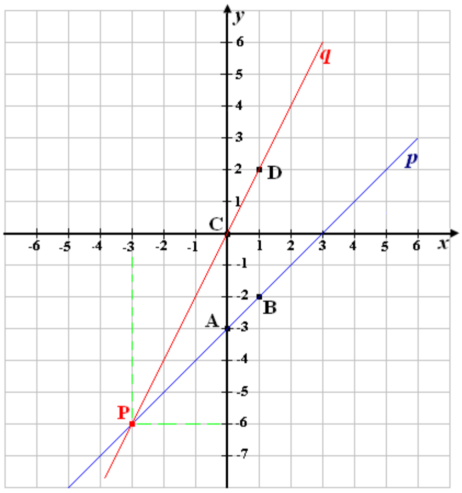
$$f: \quad y=2x$$
$$y=2\cdot 0$$
$$y=0$$

Pro $x=1$:

$$g: \quad y=2x$$
$$y=2\cdot 1$$
$$y=2$$

Grafem lineární funkce $f: \quad y=x-3$ je přímka *p*, která prochází body A = [0, –3], B = [1, –2]. Grafem lineární funkce $g: \quad y=2x$ je přímka *q*, která prochází body C = [0, 0], D = [1, 2].

Přímky si pomocí bodů znázorníme v pravoúhlé soustavě souřadnic (viz obr. č. 19):



Obr. č. 19: Graf funkce

Přímky *p* a *q* se protínají v jednom bodě (viz obr č. 19). Tento bod nazýváme průsečíkem, jeho souřadnice jsou [–3, –6]. Grafickým řešením zadané lineární rovnice je tedy průsečík P, jeho *x*-ová souřadnice zde reprezentuje hledanou neznámou *x* z lineární rovnice $x-3=2x$.

2. Graficky řešte následující lineární rovnici:

$$2x=4.$$

Pravou a levou stranu rovnice převedeme na tvary funkcí.
Pravé straně rovnice odpovídá lineární funkce:

$$f: \quad y=2x$$

Levé straně rovnice odpovídá konstantní funkce:

$$g: \quad y=4$$

Grafem každé lineární i konstantní funkce je přímka. Pro sestrojení přímky nám postačí zjistit souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
Nejprve si vytvoříme tabulku, do které zaznamenáme *x*-ové a *y*-ové souřadnice dvou bodů, kterýma přímka prochází. *X*-ovou souřadnici si zvolíme libovolně a *y*-ovou dopočítáme dosazením *x*-ové souřadnice do lineární funkce.

x	0	1
$y = 2x$	0	2

Pro $x=0$:

$$f: \quad y=2x$$
$$y=2\cdot 0$$
$$y=0$$

Pro $x=1$:

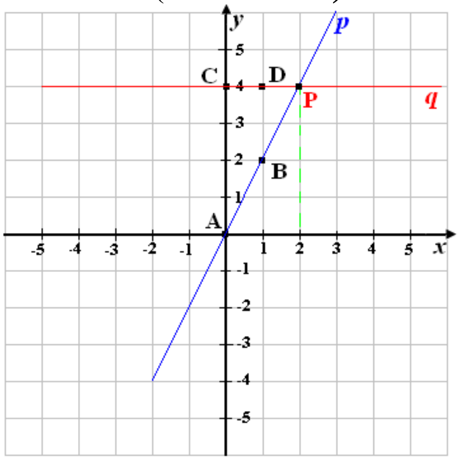
$$f: \quad y=2x$$
$$y=2\cdot 1$$
$$y=2$$

x	0	1
$y = 4$	4	4

Pro $x = 0$: Pro $x = 1$:

$g: \quad y = 4$ $g: \quad y = 4$

Grafem lineární funkce $f: \quad y = 2x$ je přímka *p*, která prochází body A = [0, 0], B = [1, 2]. Grafem konstantní funkce $g: \quad y = 4$ je přímka *q*, která prochází body C = [0, 4], D = [1, 4]. Přímky si pomocí bodů znázorníme v pravoúhlé soustavě souřadnic (viz obr. č. 20):



Obr. č. 20: Graf funkce

Přímky *p* a *q* se protínají v jednom bodě (viz obr. č. 20). Tento bod nazýváme průsečíkem, jeho souřadnice jsou [2, 4]. Grafickým řešením zadané lineární rovnice je tedy průsečík P, jeho *x*-ová souřadnice zde reprezentuje hledanou neznámou *x* z lineární rovnice.

11.4 Grafické řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

1. Řešte graficky soustavu lineárních rovnic.

$$x + 2y = 4$$
$$2x - y = 3$$

Z rovnic si nejprve vyjádříme y:

1. $x + 2y = 4$
$$2y = 4 - x$$
$$y = \frac{4 - x}{2}$$

2. $2x - y = 3$
$$-y = 3 - 2x$$
$$y = 2x - 3$$

Upravené rovnice převedeme na tvary lineárních funkcí:

$$f: \quad y = \frac{4 - x}{2}$$
$$g: \quad y = 2x - 3$$

Grafem každé lineární funkce je přímka. Pro sestrojení přímky nám postačí zjistit souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.

Nejprve si vytvoříme tabulku, do které zaznamenáme x-ové a y-ové souřadnice dvou bodů, kterými přímky prochází. X-ovou souřadnici si zvolíme libovolně a y-ovou dopočítáme dosazením x-ové souřadnice do lineární funkce.

x	0	1
$y = \frac{4 - x}{2}$	2	1, 5

Pro $x = 0$:

$$g: \quad y = \frac{4 - x}{2}$$
$$y = \frac{4 - 0}{2}$$
$$y = \frac{4}{2}$$
$$y = 2$$

Pro $x = 1$:

$$g: \quad y = \frac{4 - x}{2}$$
$$y = \frac{4 - 1}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}$$
$$y = 1,5$$

x	0	1
$y = 2x - 3$	–3	–1

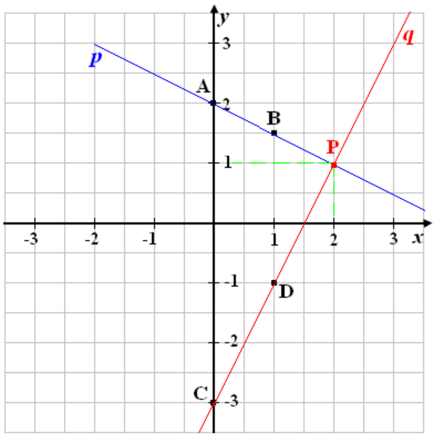
Pro $x = 0$:

$$g: \quad y = 2x - 3$$
$$y = 2 \cdot 0 - 3$$
$$y = 0 - 3$$
$$y = -3$$

Pro $x = 1$:

$$g: \quad y = 2x - 3$$
$$y = 2 \cdot 1 - 3$$
$$y = 2 - 3$$
$$y = -1$$

Grafem lineární funkce $f: \quad y = \dfrac{4 - x}{2}$ je přímka *p*, která prochází body A = [0; 2], B = [1; 1, 5]. Grafem lineární funkce $g: \quad y = 2x - 3$ je přímka *q*, která prochází body C = [0; –3], D = [1; –1]. Přímky si pomocí bodů znázorníme v pravoúhlé soustavě souřadnic (viz obr. č. 21):



Obr. č. 21: Graf funkce

Přímky *p* a *q* se protínají v jednom bodě (viz obr. č. 21). Tento bod nazýváme průsečíkem, jeho souřadnice jsou [2, 1]. Grafickým řešením zadané soustavy lineárních rovnic je uspořádaná dvojice [*x*, *y*] = [2, 1].

2. Řešte graficky soustavu lineárních rovnic.

$$-x + y = 2$$
$$-x + y = -3$$

Z rovnic si nejprve vyjádříme *y*:

1. $-x + y = 2$
   $y = 2 + x$
2. $-x + y = -3$
   $y = x - 3$

Upravené rovnice převedeme na tvary lineárních funkcí:

$$f: \quad y = 2 + x$$
$$g: \quad y = x - 3$$

Grafem každé lineární funkce je přímka. Pro sestrojení přímky nám postačí zjistit souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
Nejprve si vytvoříme tabulku, do které zaznamenáme *x*-ové a *y*-ové souřadnice dvou bodů, kterými přímky prochází. *X*-ovou souřadnici si zvolíme libovolně a *y*-ovou dopočítáme dosazením *x*-ové souřadnice do lineární funkce.

x	0	1
$y = 2 + x$	2	3

Pro $x = 0$:

$f: \quad y = 2 + x$
$y = 2 + 0$
$y = 2$

Pro $x = 1$:

$f: \quad y = 2 + x$
$y = 2 + 1$
$y = 3$

x	0	1
$y = x - 3$	–3	–2

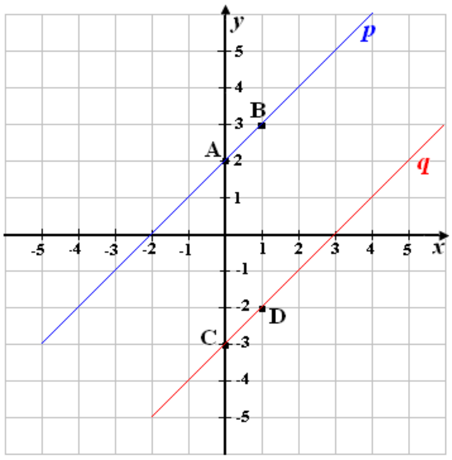
Pro $x = 0$:

$g: \quad y = x - 3$
$y = 0 - 3$
$y = -3$

Pro $x = 1$:

$g: \quad y = x - 3$
$y = 1 - 3$
$y = -2$

Grafem lineární funkce $f: \quad y = 2 + x$ je přímka *p*, která prochází body A = [0, 2], B = [1, 3]. Grafem lineární funkce $g: \quad y = x - 3$ je přímka *q*, která prochází body C = [0; –3], D = [1; –2]. Přímky si pomocí bodů znázorníme v pravoúhlé soustavě souřadnic (viz obr. č. 22):



Obr. č. 22: Graf funkce

Přímky *p* a *q* jsou rovnoběžné, nemají žádný společný bod. Soustava lineárních rovnic nemá žádné řešení.

3. Řešte graficky soustavu lineárních rovnic.

$$2x - y = 1$$
$$4x - 2y = 2$$

Z rovnic si nejprve vyjádříme *y*:

1. $2x - y = 1$
   $-y = 1 - 2x$
   $y = 2x - 1$

2. $4x - 2y = 2$
   $-2y = 2 - 4x$
   $y = 2x - 1$

Upravené rovnice převedeme na tvary lineárních funkcí:

$$f: \quad y = 2x - 1$$
$$g: \quad y = 2x - 1$$

Grafem každé lineární funkce je přímka. Pro sestrojení přímky nám postačí zjistit souřadnice dvou bodů, kterými přímka prochází.
Nejprve si vytvoříme tabulku, do které zaznamenáme x-ové a y-ové souřadnice dvou bodů, kterými přímky prochází. X-ovou souřadnici si zvolíme libovolně a y-ovou dopočítáme dosazením x-ové souřadnice do lineární funkce.
Vidíme, že přímky jsou totožné, proto nám postačí vytvořit pouze jednu tabulku.

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1

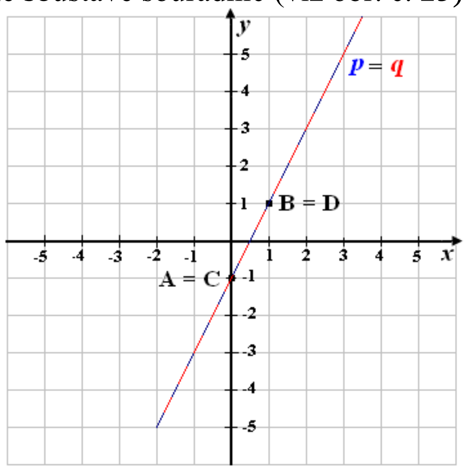
Pro $x = 0$:

$$f, g: \quad y = 2x - 1$$
$$y = 2 \cdot 0 - 1$$
$$y = 0 - 1$$
$$y = -1$$

Pro $x = 1$:

$$f, g: \quad y = 2x - 1$$
$$y = 2 \cdot 1 - 1$$
$$y = 2 - 1$$
$$y = 1$$

Grafem lineární funkce $f: \quad y = 2x - 1$ je přímka p, která prochází body A = [0, –1], B = [1, 1]. Grafem lineární funkce $g: \quad y = 2x - 1$ je přímka q, která prochází stejnými body, jako přímka p. Přímky si pomocí bodů znázorníme v pravoúhlé soustavě souřadnic (viz obr. č. 23):



Obr. č. 23: Graf funkce

Přímky p a q jsou totožné (představují jednu přímku). Soustava lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení.

11.5 Slovní úlohy

11.5.1 Úlohy, ve kterých rozdělujeme celek na nestejné části

1. Rozloha Rakouska, České republiky a Slovenska je dohromady 211 739 km^2. Přičteme-li k rozloze Slovenska 29 834 km^2, získáme rozlohu České republiky. Odečteme-li od součtu rozloh České republiky a Slovenska 44 049 km^2, získáme rozlohu Rakouska. Určete rozlohu všech států.

   Celkem rozloha … $211\,739 \text{ km}^2$

   Slovensko ……… $x \text{ km}^2$

   Česká republika … $(x + 29\,834)\text{ km}^2$

   Rakousko………… $\{[x + (x + 29\,834)] - 44\,049 = 2x - 14\,215\}\text{ km}^2$

   Sestavíme rovnici:

   $$\begin{aligned} x + (x + 29\,834) + (2x - 14\,215) &= 211\,739 \quad / \textit{ odstraníme závorky} \\ x + x + 29\,834 + 2x - 14\,215 &= 211\,739 \quad / \textit{ upravíme} \\ 4x + 15\,619 &= 211\,739 \quad / -15\,619 \\ 4x &= 196\,120 \quad / :4 \\ x &= 49\,030 \end{aligned}$$

   <u>Dosazením získáme jednotlivé rozlohy:</u>

   Rozloha Slovenska:

   $$x = 49\,030$$

   Rozloha České republiky:

   $$x + 29\,834 = 49\,030 + 29\,834 = 78\,864$$

   Rozloha Rakouska:

   $$2x - 14\,215 = 2 \cdot 49\,030 - 14\,215 = 83\,845$$

   Rozloha Slovenska je 49 030 km^2, rozloha České republiky je 78 864 km^2 a rozloha Rakouska je 83 845 km^2.

2. Celková hustota zalidnění Polska, Německa, Slovenska a České republiky je 591 obyvatel na km^2. Přičteme-li k Polsku 10 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění v České republice. Odečteme-li od hustoty zalidnění v České republice 30 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění na Slovensku. Odečteme-li od dvojnásobku hustoty zalidnění v Polsku 14 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění v Německu. Určete hodnotu zalidnění v jednotlivých státech. Který ze států má nejvyšší počet obyvatel na km^2?

   Celkem obyvatel na km^2 …......................591
   Polsko obyvatel na km^2 …………………x
   Česká republika obyvatel na km^2……… $x + 10$
   Slovensko obyvatel na km^2 …………… $(x + 10) - 30 = x - 20$
   Německo obyvatel na km^2 …………….. $2x - 14$

$$
\begin{aligned}
x+(x+10)+(x-20)+(2x-14)&=591 && /\ \textit{odstraníme závorky}\\
x+x+10+x-20+2x-14&=591 && /\ \textit{upravíme}\\
5x-24&=591 && /+24\\
5x&=615 && /:5\\
x&=123
\end{aligned}
$$

<u>Dosazením získáme hustotu zalidnění jednotlivých států:</u>

Hustota zalidnění Polska:

$x = 123$

Hustota zalidnění ČR:

$x + 10 = 123 + 10 = 133$

Hustota zalidnění Slovenska:

$x - 20 = 123 - 20 = 103$

Hustota zalidnění Německa:

$2x - 14 = 2 \cdot 123 - 14 = 232$

Hustota zalidnění Polska je 123 obyvatel na km^2, České republiky je 133 obyvatel na km^2, Slovenska je 103 obyvatel na km^2 a Německa je 232 obyvatel na km^2. Nejvyšší počet obyvatel na km^2 má Německo.

3. Mezi nejvíce ohrožená zvířata na světě patří panda velká, nosorožec dvourohý a tuleň středomořský. Na celém světě se vyskytuje přibližně 4 070 těchto zvířat. Odečteme-li od počtu pand velkých číslo 720, získáme počet tuleňů středomořských. Přičteme-li k šestinásobku tuleňů číslo 150, získáme počet nosorožců dvourohých. Určete přibližný počet těchto ohrožených zvířat na světě.

Celkem zvířat ………. 4 070

Panda velká ………… x

Tuleň středomořský … $x - 720$

Nosorožec dvourohý … $[6 \cdot (x-720)] + 150 = 6x - 4170$

$$
\begin{aligned}
x+(x-720)+(6x-4\,170)&=4\,070 && /\ \textit{odstraníme závorky}\\
x+x-720+6x-4\,170&=4\,070 && /\ \textit{upravíme}\\
8x-4\,890&=4\,070 && /+4\,890\\
8x&=4\,070+4\,890 && /\ \textit{upravíme}\\
8x&=8\,960 && /:8\\
x&=1120
\end{aligned}
$$

<u>Dosazením získáme počet jednotlivých zvířat:</u>

Počet pand velkých:

$x = 1120$

Počet tuleňů středomořských:

$x - 720 = 1120 - 720 = 400$

Počet nosorožců dvourohých:

$6x - 4170 = 6 \cdot 1120 - 4170 = 2\,550$

Na celém světě se vyskytuje přibližně 1 120 pand velkých, 400 tuleňů středomořských a 2 550 nosorožců dvourohých.

4. Nejvyšší hory České republiky (Sněžka), Francie (Mont Blanc) a Španělska (Pico de Teide) mají společně 10 130 metrů nad mořem (m n.m.). Sněžka je o 2 116 metrů nad mořem nižší než Pico de Teide. Odečteme-li od čtyřnásobku výšky Sněžky 1 598 metrů nad mořem, zjistíme výšku Mont Blanc. Určete výšku nejvyšších hor uvedených států a určete z nich tu nejvyšší.

Celkem m n.m. …………10 130
Pico de Teide m n.m. …...x
Sněžka m n.m ………… $x-2\,116$
Mont Blanc m n.m. …… $[4\cdot(x-2\,116)]-1\,598=4x-10\,062$

$$
\begin{aligned}
x+(x-2\,116)+(4x-10\,062)&=10\,130 &&\text{/ \textit{odstraníme závorky}}\\
x+x-2\,116+4x-10\,062&=10\,130 &&\text{/ \textit{upravíme}}\\
6x-12\,178&=10\,130 &&/+12\,178\\
6x&=22\,308 &&/:6\\
x&=3\,718
\end{aligned}
$$

<u>Dosazením získáme výšku jednotlivých hor:</u>
Výška Pico de Teide:

$$x=3\,718$$

Výška Sněžky:

$$x-2\,116=3\,718-2\,116=1\,602$$

Výška Mont Blanc:

$$4x-10\,062=4\cdot3\,718-10\,062=4\,810$$

Výška Pico de Teide je 3 718 m n.m., výška Sněžky je 1 602 m n.m., výška Mont Blanc je 4 810 m n.m..

11.5.2 Slovní úlohy o pohybu

1. Za pštrosem dvouprstým se vydal gepard. Gepard běžel za pštrosem 7 hodin, než ho dohnal. Průměrná rychlost pštrosa dvouprstého je o 30 km/h nižší než u geparda. Jaká je rychlost geparda a tím i nejrychlejšího savce na světě, víme-li, že pštros dvouprstý běžel o 3 hodiny déle než gepard.

Vycházíme ze základního fyzikálního vzorce: $v=\frac{s}{t}$

v….. rychlost
s….. dráha
t….. čas

$$v=\frac{s}{t}\Rightarrow s=v\cdot t$$

Rychlost pštrosa dvouprstého (km/h) …… v_1
Dráha pštrosa dvouprstého (km) ………… s_1

Čas pštrosa dvouprstého (hod) …………… 10

Rychlost geparda (km/h) ………………… $(v_1 + 30)$
Dráha geparda (km) ……………………… s_2
Čas geparda (hod) ……………………….. 7

Dráhy pštrosa a geparda se rovnají, dosadíme do vzorce pro dráhu:

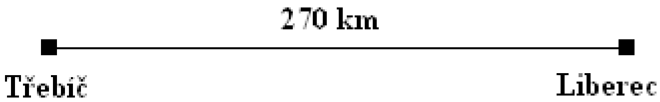
$$v_1 \cdot 10 = (v_1 + 30) \cdot 7$$
$$10v_1 = 7v_1 + 210$$
$$3v_1 = 210$$
$$v_1 = 70$$

Rychlost geparda:

$$v_1 + 30 = 70 + 30 = 100$$

Rychlost geparda je 100 km/h.

2. Vzdálenost mezi Libercem a Třebíčí je přibližně 270 km. Z Třebíče do Liberce vyjíždí současně dva automobily. První jede rychlostí 70 km/h a druhý rychlostí 50 km/h. Po příjezdu do Liberce se první automobil vydá na zpáteční cestu. V jaké vzdálenosti od Liberce se automobily potkají?



<u>1. řešení:</u>

Vycházíme ze známého fyzikálního vzorce: $v = \dfrac{s}{t}$

Automobil 1: rychlost (km/h) …….. 70
dráha (km)…………. $2 \cdot 270 - s$
čas (hod)……………. t

Automobil 2: rychlost (km/h) …….. 50
dráha (km) …………. s
čas (hod) …………… t

Čas automobilu 1 a automobilu 2 se rovnají, dosadíme do vzorce pro čas:

$$\frac{2 \cdot 270 - s}{70} = \frac{s}{50} \qquad \textit{/ upravíme první zlomek}$$
$$\frac{540 - s}{70} = \frac{s}{50} \qquad \textit{/ celou rovnici vynásobíme } 350$$
$$\frac{350 \cdot (540 - s)}{70} = \frac{350s}{50} \qquad \textit{/ zlomky krátíme}$$
$$5 \cdot (540 - s) = 7s \qquad \textit{/ odstraníme závorku}$$
$$2\,700 - 5s = 7s \qquad / -2\,700,\ -7s$$
$$-5s - 7s = -2\,700 \qquad \textit{/ upravíme}$$
$$-12s = -2\,700 \qquad / : (-120)$$
$$s = 225$$

Vzdálenost od Liberce:

$$270 - 225 = 45$$

První automobil se setká s druhým automobilem ve vzdálenosti 25 km od Liberce.

<u>2. řešení:</u>

doba jízdy ………. t hod

dráha automobilu 1: $s_1 = t \cdot v_1$

$s_1 = 70t$

dráha automobilu 2: $s_2 = t \cdot v_2$

$s_2 = 50t$

Vycházíme z faktu: $s_1 + s_2 = 2 \cdot 270$

Dosadíme:

$$70t + 50t = 2 \cdot 270 \quad / \, \textit{násobíme}$$
$$120t = 540 \quad / :120$$
$$t = 4,5$$

Zjistíme dráhu jednoho z automobilů a to dosazením do vzorce:

$$s_1 = t \cdot v_1$$
$$s_1 = 4,5 \cdot 70$$
$$s_1 = 315$$

Vzdálenost setkání prvního automobilu s druhým:

$$315 - 270 = 45$$

První automobil se s druhým automobilem setká 45 km od Liberce.

3. Třebíč a Třebenice jsou od sebe vzdáleny 20 km. Z Třebíče vyšel chodec průměrnou rychlostí 4 km/h. O 45 minut později vyjel proti němu z Třebenic cyklista průměrnou rychlostí 16 km/h. Jak daleko od Třebíče se chodec a cyklista setkají?

Vycházíme ze základního fyzikálního vzorce: $v = \frac{s}{t}$

Chodec: rychlost (km/h) …….. 4

dráha (km) ………….. s_1

čas (hod) ……………. t

Cyklista: rychlost (km/h) ……. 16

dráha (km) ………… s_2

čas (hod) ………… $t - \frac{3}{4}$ (45 min = $\frac{3}{4}\,hod$)

Dráha chodce: $s_1 = v_1 \cdot t$

$s_1 = 4t$

Dráha cyklisty: $s_2 = v_2 \cdot t$

$s_2 = 16 \cdot \left(t - \frac{3}{4} \right)$

$s_2 = 16t - 12$

Vycházíme z faktu: $s_1 + s_2 = 20$

Dosadíme:

$$\begin{aligned}
4t+(16t-12)&=20 && /\ \textit{odstraníme závorku}\\
4t+16t-12&=20 && /\ \textit{upravíme}\\
20t-12&=20 && /+12\\
20t&=20+12 && /\ \textit{upravíme}\\
20t&=32 && /:20\\
t&=1,6
\end{aligned}$$

Zjistíme vzdálenost od Třebíče:

$$\begin{aligned}
s_1&=v_1\cdot t\\
s_1&=4\cdot 1,6\\
s_1&=6,4
\end{aligned}$$

Setkají se 6, 4 km od Třebíče.

11.5.3 Úlohy o směsích různě koncentrovaných látek

1. Kolik litrů 70% lihu je nutno smíchat se třemi litry 30% lihu, abychom dostali líh 60%?

   Vycházíme ze vzorec z chemie: $c_1\cdot V_1+c_2\cdot V_2=(V_1+V_2)\cdot c$

   c_1, c_2….. .koncentrace rozpuštěné látky v roztocích

   V_1, V_2…. objemy směšovaných roztoků (litr)

   c………výsledná koncentrace smíchaných roztoků

   Dosadíme do vzorce a vypočítáme rovnici:

$$\begin{aligned}
70V_1+30\cdot 3&=60\cdot(V_1+3) && /\ \textit{odstraníme závorku}\\
70V_1+30\cdot 3&=60V_1+180 && /\ \textit{násobíme}\\
70V_1+90&=60V_1+180 && /-90,-60V_1\\
70V_1-60V_1&=180-90 && /\ \textit{upravíme}\\
10V_1&=90 && /:10\\
V_1&=9
\end{aligned}$$

   Je nutno smíchat 9 *l* 70% líhu.

2. Přidáním 150 g 94% roztoku kyseliny sírové k jejímu 2% roztoku se změnila původní koncentrace na 22%. Vypočítejte, kolik gramů 2% roztoku bylo použito k ředění?

   Vycházíme ze vzorce z chemie: $m_1\cdot c_1+m_2\cdot c_2=(m_1+m_2)\cdot c$

   m_1, m_2 ……… hmotnost roztoků, které jsou směšovány dohromady (kg nebo g)

   c_1, c_2 ……….. koncentrace rozpuštěné látky v roztoku

   c …………… výsledná koncentrace smíchaných roztoků

Dosadíme do vzorce a vypočítáme rovnici:

$$\begin{aligned}
94\cdot 150+2\cdot m_2 &= 22\cdot(150+m_2) && /\,\textit{odstraníme závorku}\\
94\cdot 150+2\cdot m_2 &= 3\,300+22m_2 && /\,\textit{násobíme}\\
14\,100+2m_2 &= 3\,300+22m_2 && /-14\,100,\,-22m_2\\
2m_2-22m_2 &= 3\,300-14\,100 && /\,\textit{upravíme}\\
-20m_2 &= -10\,800 && /:(-20)\\
m_2 &= 540
\end{aligned}$$

K ředění bylo použito 540 g 2% roztoku.

3. Máme tři druhy kyseliny octové: 15%, 13% a 50%. Kolikaprocentní kyselinu dostaneme, smícháme-li z prvého 2 *l*, z druhého 4 *l* a ze třetího 7 *l*?

Vycházíme ze vzorec z chemie:

$$c_1\cdot V_1+c_2\cdot V_2+c_3\cdot V_3=(V_1+V_2+V_3)\cdot c$$

c_1, c_2, c_3 ….. koncentrace rozpuštěné látky v roztocích
V_1, V_2, V_3…. objemi směšovaných roztoků (litr)
c……… výsledná koncentrace smíchaných roztoků

Dosadíme do vzorce a vypočítáme rovnici:

$$\begin{aligned}
15\cdot 2+13\cdot 4+50\cdot 7 &= c\cdot(2+4+7) && /\,\textit{odstraníme závorku}\\
15\cdot 2+13\cdot 4+50\cdot 7 &= 13c && /\,\textit{násobíme}\\
30+52+350 &= 13c && /\,\textit{upravíme}\\
432 &= 13c && /:13\\
c &= 33{,}2\%
\end{aligned}$$

Dostaneme 33, 2% kyselinu octovou.

11.5.4 Slovní úlohy vedoucí k soustavě rovnic

1. Nalezněte dvě čísla, o kterých víte: Přičteme-li k prvnímu číslu číslo 64, bude vzniklý součet roven číslu druhému. Přičteme-li k druhému číslu 164, bude vzniklý součet čtyřikrát větší než číslo první.

První číslo …………………………. x
Druhé číslo ………………………... y
Po přičtení k prvnímu číslu ……….. $x+64$
Po přičtení k druhému číslu ………. $y+164$
Čtyřnásobek ………………………. $4x$

Sestavíme rovnice:

$$\begin{aligned}
x+64 &= y && /-y,\,-64\\
y+164 &= 4x && /-4x.\,-164
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x-y &= -64\\
-4x+y &= -164
\end{aligned}$$

Nyní rovnice můžeme sečíst:

$$\begin{aligned}
x-4x-y+y &= -64-164 && /\,\textit{upravíme}\\
-3x &= -228 && /:(-3)\\
x &= 76
\end{aligned}$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$x - y = -64 \qquad / \textit{ dosadíme } x$$
$$76 - y = -64 \qquad / -76$$
$$-y = -64 - 76 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-y = -140 \qquad / :(-1)$$
$$y = 140$$

Jedná se o čísla 76 a 140.

2. Rozdíl součtu a rozdílu dvou čísel je o 17 menší než trojnásobek jejich součtu. Trojnásobek druhého čísla je o 1 větší než číslo první. Určete tyto čísla.

První číslo x
Druhé číslo ……………………. y
Rozdíl součtu …………………. $[x + y - (x - y)]$
Menší o 17 ……………………..$[x + y - (x - y)] + 17$
Trojnásobek jejich součtu ……. $3 \cdot (x + y)$
Trojnásobek druhého čísla …… $3x$
O 1 větší ……………………… $3x - 1$

Sestavíme rovnice:

$$[x + y - (x - y)] + 17 = 3 \cdot (x + y)$$
$$3y - 1 = x$$

Rovnice upravíme:

$$x + y - x + y + 17 = 3x + 3y \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$3y - 1 = x$$

$$2y + 17 = 3x + 3y \qquad / -3x, -3y, -17$$
$$3y - 1 = x \qquad / -x, +1$$

$$-3x - 3y + 2y = -17 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-x + 3y = 1$$

$$-3x - y = -17$$
$$-x + 3y = 1$$

Rovnice si upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$-3x - y = -17 \qquad / \cdot 3$$
$$-x + 3y = 1$$

Upravíme:

$$-9x - 3y = -51$$
$$-x + 3y = 1$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-9x - x - 3y + 3y = -51 - 1 \qquad / \textit{ upravíme}$$
$$-10x = -50 \qquad / :(-10)$$
$$x = 5$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$-x+3y=1 \qquad / \, dosadíme\ x$$
$$-5+3y=1 \qquad / +5$$
$$3y=1+5 \qquad / \, upravíme$$
$$3y=6 \qquad / :3$$
$$y=2$$

Jedná se o čísla 5 a 2.

3. V balírně mají připravit směs kakaa tak, aby 1 kg stál 250 Kč. Na skladě jsou dva druhy kakaa v ceně 230 Kč za 1 kg a 310 Kč za 1 kg. Kolik kg každého druhu je třeba smíchat, abychom připravili 60 kg požadované směsi?

Hmotnost levnějšího kakaa …………… x kg
Hmotnost dražšího kakaa ………………y kg
Hmotnost obou druhů kakaa ………….. $(x+y)$kg
Hmotnost směsi ……………………….. 60 kg
První rovnice:

$$x+y=60$$

Cena x kg levnějšího kakaa ……………. $230x$ Kč
Cena y kg dražšího kakaa ……………… $310y$ Kč
Celková cena obou druhů kakaa ………. $(230x+310y)$ Kč
Celková cena 60 kg směsi (240 Kč za 1 kg) …… $250 \cdot 60$ Kč

Druhá rovnice:

$$230x+310y=250\cdot 60$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$x+y=60 \qquad / \cdot (-230)$$
$$230x+310y=15\,000$$

Upravíme:

$$-230x-230y=-13\,800$$
$$230x+310y=15\,000$$

Nyní rovnice sečteme:

$$-230x+230x-230y+310y=-13\,800+15\,000 \qquad / \, upravíme$$
$$80y=1\,200 \qquad / :80$$
$$y=15$$

Vypočítanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$x+y=60 \qquad / \, dosadíme\ y$$
$$x+15=60 \qquad / -15$$
$$x=45$$

Je třeba smíchat 45 kg levnějšího kakaa s 15 kg dražšího kakaa.

4. Ve dvou sudech je nalito víno. Jestliže z prvního sudu nalijeme do druhého sudu právě tolik litrů vína, kolik v něm je, a potom z druhého sudu do prvního tolik litrů, kolik už je v prvním sudu, a opět z prvního sudu nalijeme do druhého sudu tolik litrů vína, kolik už je v něm, bude v každém sudu 120 *l* vína. Kolik litrů vína bylo v každém sudu na začátku?

Na začátku v prvním sudu …………… *x l*
Na začátku v druhém sudu …………... *y l*
První sud (litrů vína):
Po 1. přelití ………….. $(x-y)$
Po 2. přelití ………….. $2\cdot(x-y)$
Po 3. přelití ………….. $2\cdot(x-y)-[2y-(x-y)]$

Druhý sud (litrů vína):
Po 1. přelití ………….. $2y$
Po 2. přelití ………….. $2y-(x-y)$
Po 3. přelití ………….. $2\cdot[2y-(x-y)]$

Sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2\cdot(x-y)-[2y-(x-y)]&=120\\ 2\cdot[2y-(x-y)]&=120 \end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} 2x-2y-[2y-x+y]&=120 \quad &&/\ \textit{odstraníme závorku}\\ 2\cdot[2y-x+y]&=120 \quad &&/\ \textit{odstraníme závorku}\\ \hline 2x-2y-2y+x-y&=120 \quad &&/\ \textit{upravíme}\\ 4y-2x+2y&=120 \quad &&/\ \textit{upravíme}\\ \hline 3x-5y&=120\\ -2x+6y&=120 \end{aligned}$$

Rovnice si upravíme, abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned} 3x-5y&=120 \quad &&/\cdot 2\\ -2x+6y&=120 \quad &&/\cdot 3 \end{aligned}$$

Upravíme:

$$\begin{aligned} 6x-10y&=240\\ -6x+18y&=360 \end{aligned}$$

Nyní můžeme sečíst:

$$\begin{aligned} 6x-6x-10y+18y&=240+360 \quad &&/\ \textit{upravíme}\\ 8y&=600 &&/:8\\ y&=75 \end{aligned}$$

Vypočítanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} 3x-5y&=120 \quad &&/\ \textit{dosadíme y}\\ 3x-5\cdot 75&=120 &&/\ \textit{násobíme}\\ 3x-375&=120 &&/+375\\ 3x&=120+375 &&/\ \textit{upravíme}\\ 3x&=495 &&/:3\\ x&=165 \end{aligned}$$

V prvním sudu bylo na začátku 165 l vína a v druhém sudu bylo 75 l vína.

5. Dvěma přítoky nateče do nádrže za 8 minut 320 litrů vody. Přítokem o větším průměru nateče za 8 minut o 20 litrů více než přítokem o menším průměru za 12 minut. Kolik litrů vody nateče každým přítokem za jednu minutu?

Oběma přítoky za 8 minut …………………………… 320 litrů

Oběma přítoky za 1 minutu ………………………….. $\frac{320}{8} = 40$ litrů

Přítokem o větším průměru přiteče za minutu ……….. x litrů
Přítokem o menším průměru přiteče za minutu ……… y litrů
<u>První rovnice:</u>

$$x + y = 40$$

Přítokem o větším průměru přiteče za 8 minut o 20 litrů více než druhým za 12 minut. tzn.:

$$8x - 20 = 12y$$

Máme 2 rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 8x - 20 &= 12y \quad / + 20, -12y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ 8x - 12y &= 20 \end{aligned}$$

Rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \quad / \cdot (-8) \\ 8x - 12y &= 20 \end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} -8x - 8y &= -320 \\ 8x - 12y &= 20 \end{aligned}$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$\begin{aligned} -8x + 8x - 8y - 12y &= -320 + 20 \quad / \, upravíme \\ -20y &= -300 \quad / : (-20) \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \quad / \, dosadíme \; y \\ x + 15 &= 40 \quad / -15 \\ x &= 40 - 15 \quad / \, upravíme \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Přítokem o větším průměru nateče za minutu 25 litrů a přítokem s menším průměrem nateče 15 litrů za minutu.

6. Ze dvou pájek, z nichž jedna obsahuje 44 % mědi a 56 % zinku a druhá obsahující 52 % mědi a 48 % zinku, máme vyrobit 40 kg pájky o obsahu 45 % mědi a 55 % zinku. Vypočítejte hmotnost obou pájek ve směsi?

<u>První pájka</u>:
Hmotnost x kg …………………… $0,44x$ kg Cu
…………………… $0,56x$ kg Zn
<u>Druhá pájka:</u>
Hmotnost y kg ……………………$0,52y$ kg Cu
……………………$0,48y$ kg Zn
Nová pájka:
Hmotnost 40 kg ………………….. $0,45 \cdot 40$ kg Cu
………………….. $0,55 \cdot 40$ kg Zn

Řešíme soustavu rovnic:

$$0,44x + 0,52y = 0,45 \cdot 40 \quad / \textit{ násobíme}$$
$$0,56x + 0,48y = 0,55 \cdot 40 \quad / \textit{ násobíme}$$

$$0,44x + 0,52y = 18$$
$$0,56x + 0,48y = 22$$

Rovnice si upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$0,44x + 0,52y = 18 \quad / \cdot (-5\,600)$$
$$0,56x + 0,48y = 22 \quad / \cdot (4\,200)$$

Rovnice si upravíme:

$$-2\,464x - 2\,912y = -100\,800$$
$$2\,464x + 2\,112y = 96\,800$$

Rovnice můžeme sečíst:

$$-2\,464x + 2\,464x - 2\,912y + 2\,112y = -100\,800 + 96\,800$$
$$-800y = -4000$$
$$y = 5$$

Získanou neznámou si dosadíme do rovnice:

$$2\,464x + 2\,112y = 96\,800 \quad / \textit{ dosadíme y}$$
$$2\,464x + 2\,112 \cdot 5 = 96\,800 \quad / \textit{ násobíme}$$
$$2464x + 10\,560 = 96\,800 \quad / -10\,560$$
$$2\,464x = 96\,800 - 10\,560 \quad / \textit{ upravíme}$$
$$2\,464x = 86\,240 \quad / : 2\,464$$
$$x = 35$$

První pájka má hmotnost 35 kg a druhá pájka má hmotnost 5 kg.

7. V koupelně jsou dva kohoutky. Napustíme-li do vany jedním kohoutkem 48 litrů a druhým 24 litrů vody, bude voda ve vaně teplá 26°. Napustíme-li však prvním kohoutkem 16 litrů a druhým 56 litrů vody, bude teplota vody ve vaně 24°. Jaká je teplota vody, která teče z prvního a z druhého kohoutku?

Prvním kohoutkem 48 l vody ……………….. x °C
Druhým kohoutkem 24 l vody ……………… y °C
Směs ve vaně (40 + 32) = 72 l vody …………. 26°C

<u>První rovnice:</u>

$$48x + 24y = 72 \cdot 26$$

Prvním kohoutkem 16 l vody ………………… x °C
Druhým kohoutkem 56 l vody ……………….. y °C
Směs ve vaně (16 + 56) = 72 l vody ……….. 24°C

<u>Druhá rovnice:</u>

$$16x + 56y = 72 \cdot 24$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 48x + 24y &= 72 \cdot 26 \quad / \textit{ násobíme} \\ 16x + 56y &= 72 \cdot 24 \quad / \textit{ násobíme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 48x + 24y &= 1\,872 \\ 16x + 56y &= 1\,728 \end{aligned}$$

Rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned} 48x + 24y &= 1\,872 \\ 16x + 56y &= 1\,728 \quad / \cdot (-3) \end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned} 48x + 24y &= 1\,872 \\ -48x - 168y &= -5\,184 \end{aligned}$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$\begin{aligned} 48x - 48x + 24y - 168y &= 1\,872 - 5\,184 \quad / \textit{ upravíme} \\ -144y &= -3\,312 \quad / : (-144) \\ y &= 23 \end{aligned}$$

Získanou neznámou si dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned} 48x + 24y &= 1\,872 \quad / \textit{ dosadíme } y \\ 48x + 24 \cdot 23 &= 1\,872 \quad / \textit{ násobíme} \\ 48x + 552 &= 1\,872 \quad / -552 \\ 48x &= 1\,872 - 552 \quad / \textit{ upravíme} \\ 48x &= 1\,320 \quad / : 48 \\ x &= 27{,}5 \end{aligned}$$

Teplota vody prvního kohoutku je 27, 5°C a teplota druhého je 23°C.

8. Dva vklady, z nichž jeden je úročen 3 % a druhý 5 % ročně, dohromady vynesly 63 Kč na úrocích za jeden rok. V případě, že by se jejich úrokové míry vyměnily, vynesly by oba vklady za rok o 6 Kč méně. Kolik Kč činily vklady? Neuvažujeme daň z úroků.

Vklad 1 ….. x Kč ……….. 3 % úrok
Vklad 2 ….. y Kč ……….. 5 % úrok
<u>První rovnice:</u>

$$0{,}03x + 0{,}05y = 63$$

Vklad 1 …... x Kč ………. 5 % úrok
Vklad 2 …... y Kč ………. 3 % úrok

Druhá rovnice:

$$0,05x+0,03y=57$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}0,03x+0,05y&=63\\0,05x+0,03y&=57\end{aligned}$$

Rovnice si upravíme:

$$\begin{aligned}0,03x+0,05y&=63 \quad /\cdot 100\\0,05x+0,03y&=57 \quad /\cdot 100\end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned}3x+5y&=6\,300\\5x+3y&=5\,700\end{aligned}$$

Rovnice si upravíme, tak abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned}3x+5y&=6\,300 \quad /\cdot(-5)\\5x+3y&=5\,700 \quad /\cdot 3\end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$\begin{aligned}-15x-25y&=-31\,500\\15x+9y&=17\,100\end{aligned}$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$\begin{aligned}-15x+15x-25y+9y&=-31500+17\,100\\-16y&=-14\,400\\y&=900\end{aligned}$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$\begin{aligned}3x+5y&=6\,300 && /\ \textit{dosadíme y}\\3x+5\cdot 900&=6\,300 && /\ \textit{násobíme}\\3x+4\,500&=6300 && /-4\,500\\3x&=6\,300-4\,500 && /\ \textit{upravíme}\\3x&=1\,800 && /:3\\x&=600\end{aligned}$$

Vklad úročený 3 % činil 600 Kč a vklad úročený 5 % činil 600 Kč.

9. Smícháním dvou slitin mědi s obsahem 70 % a 80 % chceme získat 60 kg slitiny s obsahem 75 % mědi. Kolik kg každé slitiny použijeme?

Hmotnost první slitiny …….. x kg ……. $0,7x$ kg mědi
Hmotnost druhé slitiny ……. y kg ……. $0,8y$ kg mědi
Hmotnost výsledné slitiny … 60 kg …... $60\cdot 0,75=45$kg mědi

Sestavíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}0,7x+0,8y&=45\\x+y&=60\end{aligned}$$

Rovnice upravíme tak, abychom je mohli sečíst:

$$\begin{aligned}0,7x+0,8y&=45\\x+y&=60 \quad /\cdot(-0,7)\end{aligned}$$

Rovnice upravíme:

$$0,7x + 0,8y = 45$$
$$-0,7x - 0,7y = -42$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$0,7x - 0,7x + 0,8y - 0,7y = 45 - 42 \quad / \; upravíme$$
$$0,1y = 3 \quad / : 0,1$$
$$y = 30$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$x + y = 60 \quad / \; dosadíme \; y$$
$$x + 30 = 60 \quad / -30$$
$$x = 60 - 30 \quad / \; upravíme$$
$$x = 30$$

Použijeme 30 kg slitiny obsahující 70 % mědi a 30 kg slitiny obsahující 80 % mědi.

10. Dvě města jsou po řece od sebe ve vzdálenosti 100 km. Po proudu urazí člun tuto vzdálenost za 2 hodiny, proti proudu za 5 hodin. Určete rychlost proudu v řece.

Vlastní rychlost člunu ………. x km/h
Rychlost proudu ……………. y km/h
Po proudu …………………... 2 hod
Proti proudu ………………... 5 hod
Rychlosti člunu po proudu …. $x + y$
Rychlost člunu proti proudu ... $x - y$
Vzdálenost měst …………… 100 km

Vycházíme ze známého fyzikálního vzorce: $v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad s = v \cdot t$

v …….. rychlost
s …….. dráha
t …….. čas

Dosadíme do vzorce pro dráhu. V prvním vzorci využijeme rychlost člunu po proudu a v druhém rychlost člunu proti proudu:

$$(x + y) \cdot 2 = 100$$
$$(x - y) \cdot 5 = 100$$

$$2x + 2y = 100$$
$$5x - 5y = 100$$

Rovnice upravíme tak, aby se dali sečíst:

$$2x + 2y = 100 \quad / \cdot 5$$
$$5x - 5y = 100 \quad / \cdot 2$$

Rovnice upravíme:

$$10x + 10y = 500$$
$$10x - 10y = 200$$

Nyní můžeme rovnice sečíst:

$$10x + 10x + 10y - 10y = 500 + 200 \quad / \; \textit{upravíme}$$
$$20x = 700 \quad / : 20$$
$$x = 35$$

Získanou neznámou dosadíme do rovnice:

$$2x + 2y = 100 \quad / \; \textit{dosadíme x}$$
$$2 \cdot 35 + 2y = 100 \quad / \; \textit{násobíme}$$
$$70 + 2y = 100 \quad / -70$$
$$2y = 100 - 70 \quad / \; \textit{upravíme}$$
$$2y = 30 \quad / : 2$$
$$y = 15$$

Rychlost proudu v řece je 15 km/h.

11.6 Rovnice vedoucí po úpravě na řešení lineárních rovnic

V matematice se setkáváme s rovnicemi, které nemají tvar lineárních rovnic, ale pomocí ekvivalentních úprav je na něj můžeme převést a poté je vypočítat. Mezi takovéto případy patří např. rovnice, které obsahují kvadratické členy nebo rovnice s neznámou ve jmenovateli.

11.6.1 Kvadratické členy

1. Vyřešte následující rovnici $2 \cdot (x-3) \cdot (5-x) = 2x \cdot (3-x)$. Proveďte zkoušku.

   Řešení: Budeme postupovat obvyklým způsobem pomocí ekvivalentních úprav.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot (x-3) \cdot (5-x) &= 2x \cdot (3-x) && \textit{/ odstraníme první závorku} \\
(2x-6) \cdot (5-x) &= 2x \cdot (3-x) && \textit{/ odstraníme zbylé závorky} \\
10x - 2x^2 - 30 + 6x &= 6x - 2x^2 && \textit{/ upravíme} \\
16x - 2x^2 - 30 &= 6x - 2x^2 && / + 2x^2 \\
16x - 2x^2 + 2x^2 - 30 &= 6x && \textit{/ upravíme} \\
16x - 30 &= 6x && / -6x, +30 \\
16x - 6x &= 30 && \textit{/ upravíme} \\
10x &= 30 && / :30 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

   Po roznásobení závorek jsme v rovnici dostali kvadratické členy. Pomocí ekvivalentní úpravy ve čtvrtém řádku se druhá mocnina zrušila a dále v rovnici nevystupuje. Jde tedy zase o lineární rovnici.

   Zkouška:

$$
\begin{aligned}
&L: \quad 2 \cdot (x-3) \cdot (5-x) = 2 \cdot (3-3) \cdot (5-3) = 2 \cdot 0 \cdot 2 = 0 \\
&P: \quad 2x \cdot (3-x) = 2 \cdot 3 \cdot (3-3) = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0 \\
&L = P
\end{aligned}
$$

2. Řešte následující rovnice.

   a) $x \cdot (4x-5) = 4x \cdot (x+5)$

   Řešení:

$$
\begin{aligned}
x \cdot (4x-5) &= 4x \cdot (x+5) && \textit{/ odstraníme závorky} \\
4x^2 - 5x &= 4x^2 + 20x && / -4x^2 \\
4x^2 - 4x^2 - 5x &= 20x && \textit{/ upravíme} \\
-5x &= 20x && / -20x \\
-5x - 20x &= 0 && \textit{/ upravíme} \\
-25x &= 0 && / :(-25) \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

b) $4-2\cdot(2n-1)\cdot(3-2n)=6n-2\cdot(n+5)\cdot(3-4n)$

Řešení:

$$4-2\cdot(2n-1)\cdot(3-2n)=6n-2\cdot(n+5)\cdot(3-4n) \quad \textit{/ roznásobíme závorky}$$
$$4-2\cdot(6n-4n^2-3+2n)=6n-2\cdot(3n-4n^2+15-20n) \quad \textit{/ upravíme závorky}$$
$$4-2\cdot(8n-4n^2-3)=6n-2\cdot(-17n-4n^2+15) \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$4-16n+8n^2+6=6n+34n+8n^2-30 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$10-16n+8n^2=40n+8n^2-30 \quad /-8x^2$$
$$10-16n+8n^2-8n^2=40n-30 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$10-16n=40n-30 \quad /-40n,-10$$
$$-16n-40n=-30-10 \quad \textit{/ upravíme}$$
$$-56n=-40 \quad /:(-56)$$
$$n=\frac{40}{56} \quad \textit{/ zlomek krátíme}$$
$$n=\frac{5}{7}$$

3. Řešte následující rovnice.

a) $\left(2c+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(3c-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{28}=6c^2-\frac{c}{14}$

Řešení:

$$\left(2c+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(3c-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{28}=6c^2-\frac{c}{14} \quad \textit{/ odstraníme závorky}$$
$$6c^2-\frac{2c}{4}+\frac{3c}{7}-\frac{1}{28}+\frac{1}{28}=6c^2-\frac{c}{14} \quad \textit{/ celou rovnici násobíme } 28$$
$$6c^2\cdot 28-\frac{2c}{4}\cdot 28+\frac{3c}{7}\cdot 28-\frac{1}{28}\cdot 28+\frac{1}{28}\cdot 28=6c^2\cdot 28-\frac{c}{14}\cdot 28 \quad \textit{/ násobíme}$$
$$168c^2-\frac{56c}{4}+\frac{84c}{7}-\frac{28}{28}+\frac{28}{28}=168c^2-\frac{28c}{14} \quad \textit{/ zlomky krátíme}$$
$$168c^2-14c+12c-1+1=168c^2-2c \quad \textit{/ upravíme}$$
$$168c^2-2c=168c^2-2c \quad /-168c^2,+2c$$
$$168c^2-168c^2=-2c+2c \quad \textit{/ upravíme}$$
$$0=0$$

Zadaná rovnice má řešení pro všechna reálná čísla.

b) $y\cdot\left(\frac{5y}{6}-\frac{10}{3}\right)-\frac{5}{6}=\frac{3}{2}\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{2y^2}{3}$

Řešení:

$$y\cdot\left(\frac{5y}{6}-\frac{10}{3}\right)-\frac{5}{6}=\frac{3}{2}\cdot\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{2y^2}{3} \quad \textit{/ nejprve roznásobíme závorky}$$
$$\frac{5y^2}{6}-\frac{10y}{3}-\frac{5}{6}=\frac{3}{2}\cdot\left(y^2+\frac{1y}{2}-\frac{1y}{2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{2y^2}{3} \quad \textit{/ upravíme závorku}$$
$$\frac{5y^2}{6}-\frac{10y}{3}-\frac{5}{6}=\frac{3}{2}\cdot\left(y^2-\frac{1}{4}\right)-\frac{2y^2}{3} \quad \textit{/ odstraníme závorku}$$

$$\frac{5y^2}{6}-\frac{10y}{3}-\frac{5}{6}=\frac{3y^2}{2}-\frac{3}{8}-\frac{2y^2}{3} \qquad \text{/ celou rovnici vynásobíme } 24$$
$$\frac{5y^2}{6}\cdot 24-\frac{10y}{3}\cdot 24-\frac{5}{6}\cdot 24=\frac{3y^2}{2}\cdot 24-\frac{3}{8}\cdot 24-\frac{2y^2}{3}\cdot 24 \qquad \text{/ násobíme}$$
$$\frac{120y^2}{6}-\frac{240y}{3}-\frac{120}{6}=\frac{72y^2}{2}-\frac{72}{8}-\frac{48y^2}{3} \qquad \text{/ zlomky krátíme}$$
$$20y^2-80y-20=36y^2-9-16y^2 \qquad \text{/ upravíme}$$
$$20y^2-80y-20=20y^2-9 \qquad /-20y^2$$
$$20y^2-20y^2-80y-20=-9 \qquad \text{/ upravíme}$$
$$-80y-20=-9 \qquad /+20$$
$$-80y=-9+20 \qquad \text{/ upravíme}$$
$$-80y=11 \qquad /:(-80)$$
$$y=-\frac{11}{80}$$

11.6.2 Rovnice s neznámou ve jmenovateli

1. Řešte rovnici
$$\frac{3}{2a}=2-\frac{4}{2a}.$$
Řešení:
Nejprve si stanovíme podmínku, aby rovnice měla smysl.
Podmínka:
$$2a=0 \quad /:2$$
$$a=0$$
Rovnice nebude mít smysl, pokud hodnota $a=0$.
Rovnici pak vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav:
$$\frac{3}{2a}=2-\frac{4}{2a} \qquad \text{/ celou rovnici vynásobíme } 2a$$
$$\frac{3\cdot 2a}{2a}=2\cdot 2a-\frac{4\cdot 2a}{2a} \qquad \text{/ zlomky krátíme}$$
$$3=2\cdot 2a-4 \qquad \text{/ násobíme}$$
$$3=4a-4 \qquad /-4a,-3$$
$$-4a=-4-3 \qquad \text{/ upravíme}$$
$$-4a=-7 \qquad /:(-4)$$
$$a=\frac{7}{4}$$

Pomocí ekvivalentních úprav jsme z rovnice získali hodnotu neznámé a, kde $a=\frac{7}{4}$. Tuto hodnotu porovnáme s podmínkou. Vidíme, že podmínka je odlišná od získané hodnoty a, $a=\frac{7}{4}$ je tedy řešením zadané rovnice.

2. Řešte rovnici

$$\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x}=\frac{8}{x}.$$

Řešení:
Nejprve si stanovíme podmínky, aby rovnice měla smysl.
Podmínky:

1. $x+1=0 \quad / -1$
   $x=-1$
2. $x=0$

Rovnice nebude mít smysl, pokud hodnota $x = 0$, nebo $x = -1$.
Rovnici pak vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x}=\frac{8}{x} \qquad \textit{/ celou rovnici vynásobíme x a } (x+1)$$

$$\frac{4}{x+1}\cdot x\cdot(x+1)+\frac{4}{x}\cdot x\cdot(x+1)=\frac{8}{x}\cdot x\cdot(x+1) \quad \textit{/ krátíme}$$

$$4x+4\cdot(x+1)=8\cdot(x+1) \qquad \textit{/ odstraníme závorky}$$

$$4x+4x+4=8x+8 \qquad \textit{/ upravíme}$$

$$8x+4=8x+8 \qquad / -8x, -4$$

$$8x-8x=8-4 \qquad \textit{/ upravíme}$$

$$0x=4$$

V této rovnici jsme se pomocí ekvivalentních úprav dostali k rovnosti, která není splněna pro žádné *x*. Použili jsme pouze ekvivalentní úpravy, proto není nikdy splněna ani původní rovnice. Zadaná rovnice nemá řešení.

3. Řešte rovnici

$$\frac{12y}{3y-1}=4+\frac{4}{3y-1}.$$

Řešení:
Nejprve si stanovíme podmínky, aby rovnice měla smysl.
Podmínky:

1. $3y-1=0 \quad / +1$
   $3y=1 \quad / :3$
   $y=\frac{1}{3}$

Rovnice nebudeme mít smysl, pokud se $y=\frac{1}{3}$.

Rovnici pak vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{12y}{3y-1}=4+\frac{4}{3y-1} \qquad \text{/ } \textit{celou rovnici vynásobíme } (3y-1)$$

$$\frac{12y}{3y-1}\cdot(3y-1)=4\cdot(3y-1)+\frac{4}{3y-1}\cdot(3y-1) \qquad \text{/ } \textit{krátíme}$$

$$12y=4\cdot(3y-1)+4 \qquad \text{/ } \textit{odstraníme závorku}$$

$$12y=12y-4+4 \qquad \text{/ } \textit{upravíme}$$

$$12y=12y+0 \qquad \text{/ } -12y$$

$$12y-12y=0 \qquad \text{/ } \textit{upravíme}$$

$$0y=0$$

Po úpravách rovnice jsme dospěli k rovnosti, která je splněna nezávisle na tom, jakou hodnotu má neznámá *y*. Nesmíme ale zapomenout, že na začátku jsme si určili podmínku, která nám určuje, kdy bude mít rovnice smysl. Určená podmínka musí být splněna. Řešením rovnice jsou tedy všechny reálná čísla s výjimkou $y=\frac{1}{3}$.

4. Řešte rovnici

$$\frac{2a+5}{a-1}=\frac{a+6}{a-1}.$$

Řešení:
Nejprve si stanovíme podmínky, aby rovnice měla smysl.
Podmínky:

$$a-1=0 \quad \text{/ } +1$$

$$a=1$$

Rovnice nebudeme mít smysl, pokud se $a=1$.
Rovnici pak vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{2a+5}{a-1}=\frac{a+6}{a-1} \qquad \text{/ } \textit{celou rovnici vynásobíme } (a-1)$$

$$\frac{2a+5}{a-1}\cdot(a-1)=\frac{a+6}{a-1}\cdot(a-1) \qquad \text{/ } \textit{krátíme}$$

$$2a+5=a+6 \qquad \text{/ } -a,-5$$

$$2a-a=6-5 \qquad \text{/ } \textit{upravíme}$$

$$a=1$$

Po úpravách jsme nalezli hodnotu neznámé. Tato neznámá může být jediná řešením zadané rovnice. Porovnáme-li tuto hodnotu se stanovenou podmínkou, vidíme, že právě pro ni nemá rovnice smysl. Rovnice nemá řešení, protože jí nevyhovuje žádná hodnota *a*.

5. Řešte následující rovnici

$$\frac{4x+1}{3-2x+2\cdot(3x-1)}+\frac{5\cdot(2-x)+2}{3\cdot(2x-1)-4}=-6.$$

Řešení:
Nejprve si rovnici upravíme a poté stanovíme podmínky:

$$\frac{4x+1}{3-2x+2\cdot(3x-1)}+\frac{5\cdot(2-x)+2}{3\cdot(2x-1)-4}=-6 \quad / \textit{ nejprve odstraníme závorky}$$

$$\frac{4x+1}{3-2x+6x-2}+\frac{10-5x+2}{6x-3-4}=-6 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$\frac{4x+1}{4x+1}+\frac{12-5x}{6x-7}=-6$$

Stanovíme si podmínky:

$$\begin{aligned} &1. \quad 4x+1=0 && /-1 \\ &\quad 4x=-1 && /:4 \\ &\quad x=-\frac{1}{4} \\ &2. \quad 6x-7=0 && /+7 \\ &\quad 6x=7 && /:6 \\ &\quad x=\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Rovnice nebudeme mít smysl, pokud se $x=-\frac{1}{4}$ nebo $x=\frac{7}{6}$.

Upravenou rovnici pak vyřešíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$\frac{4x+1}{4x+1}+\frac{12-5x}{6x-7}=-6 \quad / \textit{ první zlomek krátíme}$$

$$1+\frac{12-5x}{6x-7}=-6 \quad / \textit{ celou rovnici vynásobíme } (6x-7)$$

$$6x-7+\frac{12-5x}{6x-7}\cdot(6x-7)=-6\cdot(6x-7) \quad / \textit{ krátíme}$$

$$6x-7+12-5x=-6\cdot(6x-7) \quad / \textit{ odstraníme závorku}$$

$$6x-7+12-5x=-36x+42 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$x+5=-36x+42 \quad / +36x, -5$$

$$x+36x=42-5 \quad / \textit{ upravíme}$$

$$37x=37 \quad / :37$$

$$x=1$$

Po úpravách jsme nalezli hodnotu neznámé. Tato neznámá může být jediná řešením zadané rovnice. Porovnáme-li tuto hodnotu se stanovenou podmínkou, vidíme, že se hodnoty neshodují. Řešením rovnice je tedy $x=1$.

12 Didaktické využití výpočetní techniky v hodinách matematiky

V rámci mého druhého aprobačního předmětu, informatiky, jsem se rozhodla zařadit do této diplomové práce i didaktické testy vytvořené v autorském systému Macromedia Authorware. Didaktické testy jsou v Pedagogickém slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 1998) definovány následovně: „Didaktický test je často chápán jako krátká písemná zkouška, při níž žák odpovídá výběrem z nabídnutých variant odpovědí. Jeho základními vlastnostmi je validita, reliabilita, praktičnost, obtížnost, citlivost.“

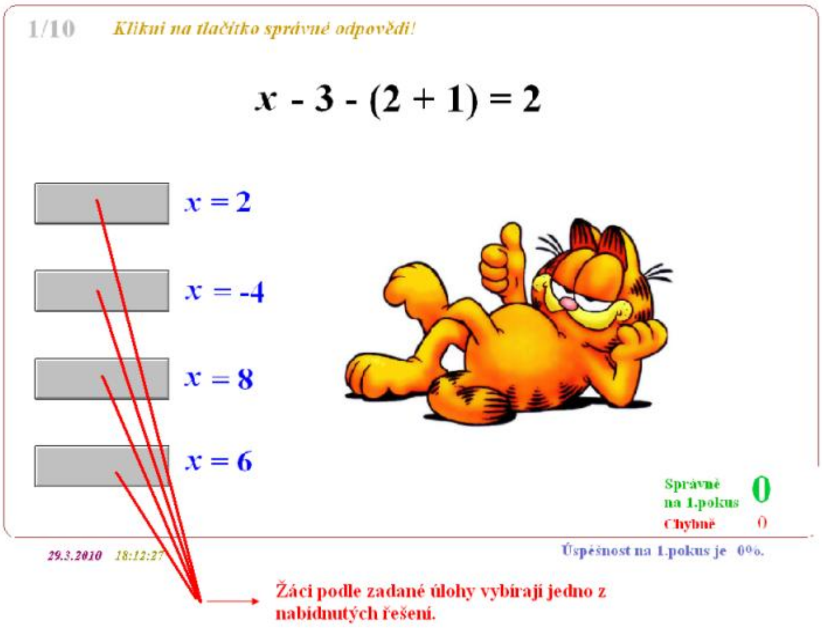
S programem Macromedia Authorware jsem se setkala na TU v Liberci v předmětu Didaktické využití výpočetní techniky pro 2. stupeň základních škol. Pod vedením Doc. PaedDr. Jiřího Nikla, CSc. jsem se naučila s tímto autorským systémem pracovat.

V tomto programu jsem vytvořila tři didaktické testy, které jsou zaměřeny na učivo lineární rovnice, lineární funkce, soustavy dvou lineárních rovnic. Jejich cílem je osvojení a procvičení si probírané látky. Žák má možnost procvičit si látku motivující formou. Didaktické testy přikládám do příloh.

Práce na počítači pro žáky vytváří příznivé a spolehlivé prostředí, které je neohrožuje a neubližuje, ale naopak je láká a přitahuje. Vytvořené didaktické testy jsou esteticky doladěny různými obrázky. Při jejich vypracování žák pracuje v příjemném prostředí, kde si zábavnou formou procvičuje získané znalosti, nepracuje pod tlakem a stresem. Počítače dávají žákovi příležitost být úspěšný v oblasti, ve které dříve neuspěl a kde často prožíval trauma z nezdaru. (Černochová, Komrska, Novák, 1998)

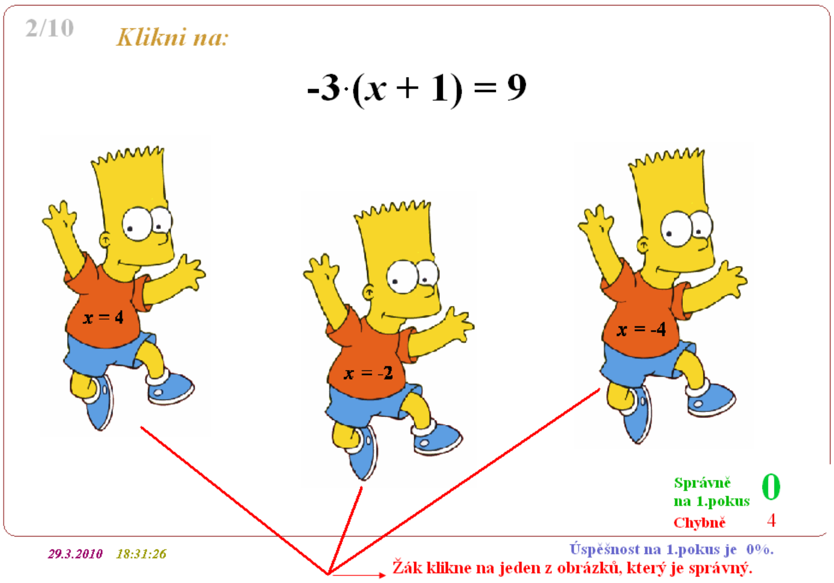
V testech jsem použila následující typy učebních úloh:

- Typ **BUTTON** – žák dostane na výběr až ze čtyř variant a volí pouze jednu správnou odpověď (viz obr. č.24).



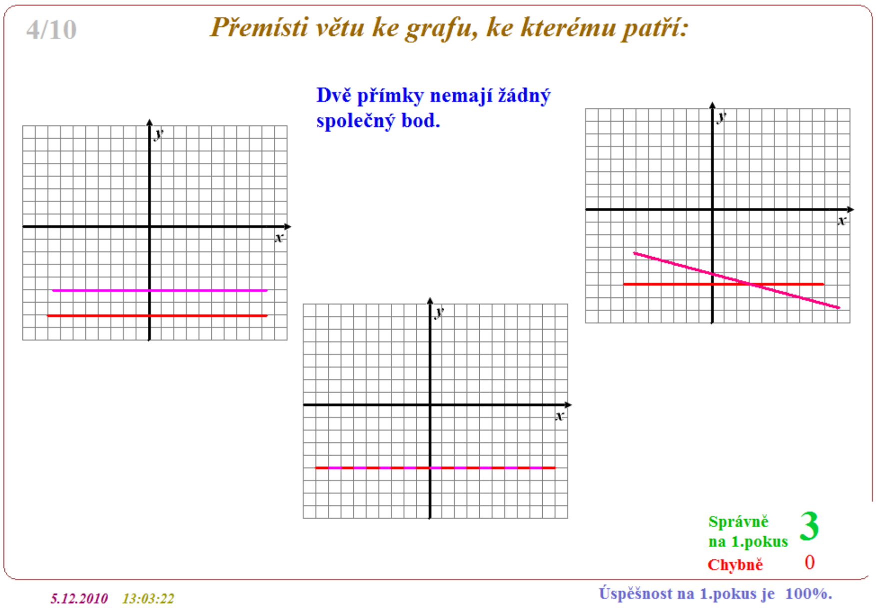
Obr. č. 24: Typ BUTTON

- Typ **HOT SPOT** – pro správnou odpověď musí žák kliknout na určitou oblast na obrazovce (viz obr. č. 25).



Obr. č. 25: Typ HOT SPOT

- Typ **TARGET AREA** – žák musí přemístit subjekt na část obrazovky, kam patří (viz obr. č. 26).



Obr. č. 26: Typ TARGET AREA

- Typ KEY PRESS – žák musí stisknout klávesu, která odpovídá správné odpovědi. Na výběr jsou možné 2 varianty (viz obr. č. 27).

Obr. č. 27: Typ KEY PRESS

Práce s didaktickým testem v programu Macromedia Authorware

Žák pracuje s programem zcela samostatně. Při spuštění testu je nutné zadat jméno a příjmení (viz obr. č. 28).

Obr. č. 28: Přihlášení

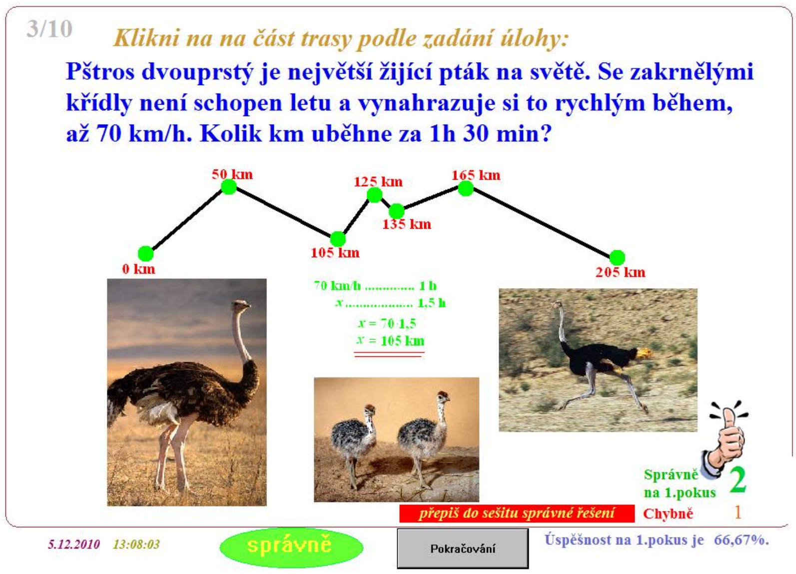
Didaktický test je složen z deseti úkolů, které jsou na sobě navzájem závislé. V průběhu testu je žák informován, zda úkol vyřešil správně nebo chybně. Při správném vyřešení úkolu je žákovi vizuálně signalizováno správné řešení, a to verbálně zeleným výrazem SPRÁVNĚ. Zelená arabská číslice vyjadřuje počet správně řešených úkolů na první pokus a nalezneme zde také procentuální úspěšnost (viz obr. č. 29).

Obr. č. 29: Správné řešení

Pokud žák vyřeší zadaný úkol chybně, je mu vizuálně signalizováno chybné řešení, a to červeným výrazem CHYBA. Červená arabská číslice vyjadřuje počet chybně řešených úkolů. (viz obr. č. 30)

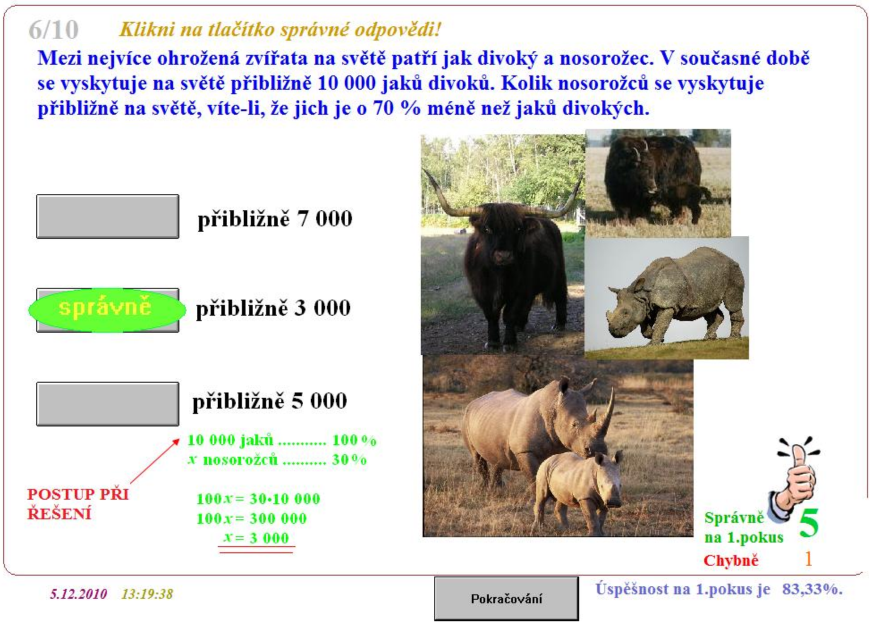
Obr. č. 30: Chybné řešení

Aplikace žákův postup v testu zadrží tehdy, pokud žák odpoví chybně. Aby se mohlo postupovat v testu dále, je třeba naleznout správné řešení. Po jeho nalezení je žák vyzván, aby správné řešení přepsal do sešitu (viz obr. č. 31).



Obr. č. 31: Přepis správného řešení

Při řešení složitějších úloh se po správném vyřešení objeví postup, jak se daný úkol řešil (viz obr. č. 32).



Obr. č. 32: Postup řešení

Když žák úspěšně absolvuje všechny otázky, zobrazí se celkové vyhodnocení, které obsahuje jméno žáka, počet pokusů, které potřeboval pro vyřešení testu, dále statistiku správně řešených úloh na první pokus a procentuální úspěšnost (viz obr. č. 33).

Obr. č. 33: Vyhodnocení

13 Aplikace testu na základní škole

V této kapitole popíši průběh spolupráce se školou, průběh hodiny, hodnocení testů, nejčastější chyby při zpracování testů. Přínosem aplikace je obzvláště možnost otestovat vytvořené testy, které jsou vybrané z vlastní vytvořené sbírky.

Varianty testů

V rámci vytvořené sbírky jsem sestavila 4 možné varianty testů (viz příloha). Všechny testy jsou podobného charakteru. Obsahují 5 úkolů. Prvním úkolem je vyřešit jednoduchou lineární rovnici s jednou neznámou, která požaduje ověření zkouškou. Druhým úkolem je složitější lineární rovnice, která vyžaduje větší pozornost a více ekvivalentních úprav. Třetí úkol se zaměřuje na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Čtvrtým úkolem je slovní úloha vedoucí k lineární rovnici s jednou neznámou a obsahem pátého úkolu je slovní úloha vedoucí k soustavě dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Spolupráce se zvolenou školou

Součástí mé diplomové práce je aplikace zvoleného testu na základní škole. Na začátku školního roku 2009/2010 jsem navštívila Základní školu ve Valči. Po konzultaci s ředitelem školy, Mgr. Janem Nešporem, mi bylo povoleno otestovat vytvořený test v devátém ročníku. Po dobu mého působení na základní škole mi byl velice nápomocen Ing. Miroslav Chládek, vyučující matematiky.

ZŠ Valeč je státní školou nacházející se v kraji Vysočina, v okrese Třebíč. ZŠ Valeč, Valeč 222, 675 53 je umístěna v nové, rozlehlé budově, která byla kompletně dostavěna v roce 2007. Svým vybavením se jedná o školu standardní. Součástí školy je školní družina a školní jídelna. V době mé návštěvy měla škola celkem 9 tříd s celkovým počtem 195 žáků. Vzdělávání a výchovu zajišťovalo 12 pedagogických pracovníků a 7 provozních zaměstnanců.

S vyučujícím jsem si stanovila přibližný termín aplikace testu, a to v období března, kdy žáci učivo lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic budou mít dostatečně osvojené a procvičené. Na začátku března byl termín přesně stanoven na 26. 3. 2010. Po konzultaci s Ing. Miroslavem Chládkem jsem vybrala test varianty A (viz příloha).

Test proběhl ve stanoveném termínu v hodině matematiky, za přítomnosti vyučujícího a 18 žáků (9 dívek a 9 chlapců). Žáci byli předem informováni. Učivo lineární rovnice a soustavy lineárních rovnic vyučující považoval za dostatečně procvičené ke dni 15. 3. 2010. Na požádání Ing. Miroslava Chládka jsem souhlasila, aby se testy započítaly do klasifikace žáků. Klasifikace testu měla zároveň zvýšit motivaci pro dosažení co nejlepších výsledků.

Průběh hodiny

Pět minut před zahájením hodiny byli všichni žáci přítomni ve třídě. Začátek hodiny byl signalizován zvoněním. Hodina začala v 11:45. Nejprve jsem se žákům představila, seznámila jsem je s testem a poté jsem zkontrolovala jejich připravenost (kalkulačka, apod.). Následně jsem rozdala testy a společně s žáky jsme si je přečetli, abych předešla případným nesrovnalostem z důvodu nepochopení formulace zadání. Po objasnění kladených dotazů ze strany žáků následovala samostatná práce. Doba na vypracování testu byla předem stanovena na 30 minut. V průběhu hodiny jsem individuálně docházela k žákům, kteří potřebovali ujasnit zadání. Nekázeň při práci jsem řešila napomenutím. Pět minut před uplynutím stanovené doby jsem třídu upozornila na blížící se konec časového limitu. Po ukončení doby, která byla stanovena, jsem žáky vyzvala k předání svých prací. Následně jsem jim poděkovala za spolupráci, popřála hodně úspěchu při studiu a zároveň sdělila, že o výsledcích testu je bude informovat Ing. Miroslav Chládek. Během hodiny se nevyskytly závažnější problémy týkající se kázně a řešení zadaných úkolů. Žáci pracovali zcela samostatně a zodpovědně.

Hodnocení testu

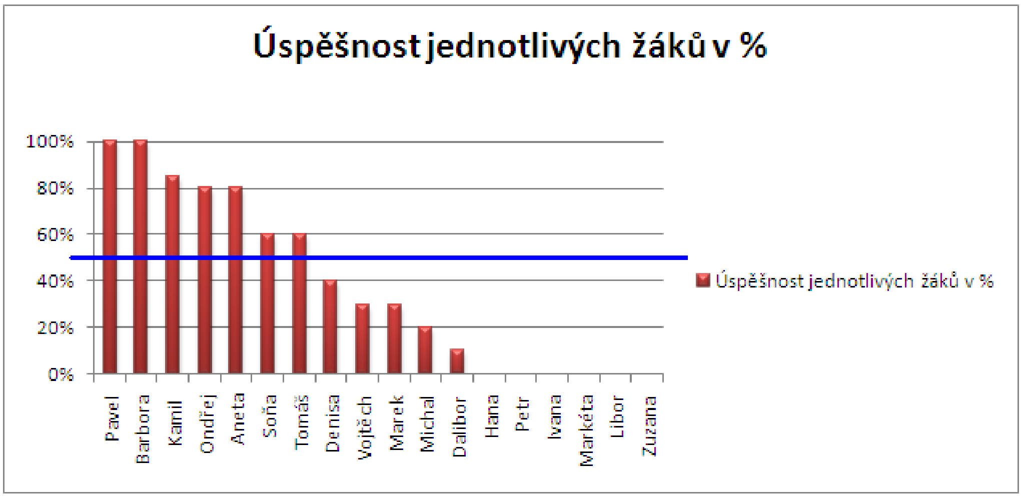
Každý správně vyřešený příklad byl ohodnocen jedním bodem, maximum dosažených bodů bylo 5.
Po konzultaci s Ing. Miroslavem Chládkem, který se v oblasti učitelství pohybuje už přes deset let, jsem dospěla k závěru, že každý žák je svým způsobem odlišný a vyhovuje mu jiný typ zadání. Někteří nemají problém s vyřešením zadané rovnice, ale spíše s jejím sestavením v případě slovních úloh. Tento problém se vyskytuje především u žáků s dyslexií, což je specifická porucha schopnosti naučit se číst běžnými metodami a porozumět čtenému textu. U takového dítěte nemusí docházet ke snížení inteligence. Děti nezvládají číst dlouhé texty, soustředit se na obsah a pochopit smysl. Zmíněná problematika je jedním z důvodů, proč jsem zvolila tento způsob bodového hodnocení, který mi byl rovněž doporučen při konzultaci s Ing. Miroslavem Chládkem.

Úspěšnost třídy i jednotlivých žáků

Jak už jsem zmínila, testu se zúčastnilo 18 žáků, z toho 9 dívek a 9 chlapců. Při vyhodnocování testů jsem nepoužila pravá jména žáků, pravdivé zůstalo pouze pohlaví. Celkově mohla třída dosáhnout 90 bodů a získala 35 bodů. Devátá třída test zvládla s úspěšností přibližně 39 %. Údaje vykazují, že víc jak polovina kolektivu neuspěla ani z 50 % (nad 50 % celkem 7 žáků). Z grafu č. 1 jsou patrná následující fakta:

100 % úspěšnost – 2 žáci
90 % úspěšnost – 1 žák
80 % úspěšnost – 2 žáci
70 % úspěšnost – 0 žáků
60 % úspěšnost – 2 žáci

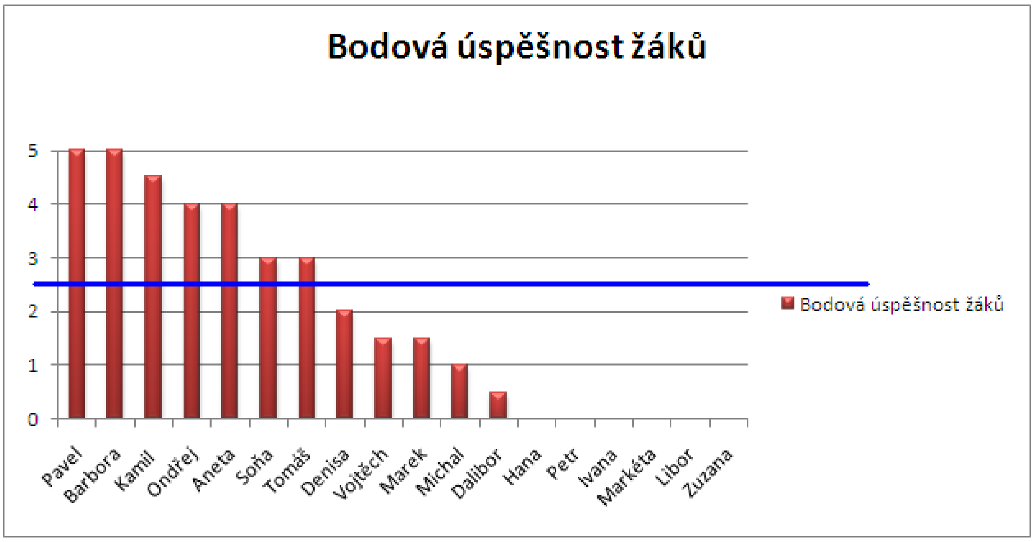
50 % úspěšnost – 0 žáků
40 % úspěšnost – 1 žáků
30 % úspěšnost – 2 žáci
20 % úspěšnost – 1 žák
10 % úspěšnost – 1 žák
0 % - 6 žáků



Graf č. 1: Úspěšnost jednotlivých žáků v %

Z grafu č. 1 je rovněž patrné, že 4 dívky a 3 chlapci zvládli test nad 50 %, naopak 5 dívek a 6 chlapců nesplnilo test ani na 50 %.

Z grafu č. 2 vyplývá, že ke splnění 50 % je potřeba 2, 5 bodu.

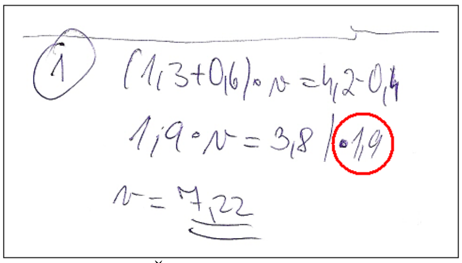


Graf č. 2: Bodová úspěšnost jednotlivých žáků

Nejčastější chyby při řešení testu

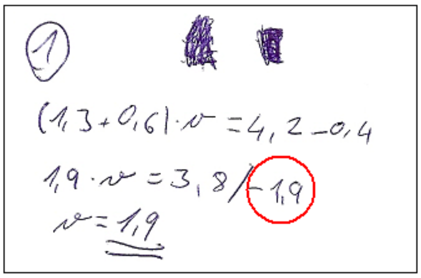
Úloha č. 1 – Žáci nejčastěji chybovali v posledním kroku, a to převážně v následujícím:

1. Záměna dělení s násobením (viz obr. č. 34):



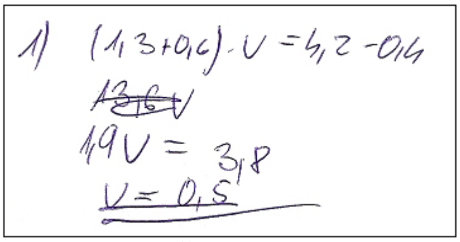
Obr. č. 34: Část práce žákyně Hanky

2. Záměna dělení s odčítáním (viz obr. č. 35):



Obr. č. 35: Část práce žákyně Zuzany

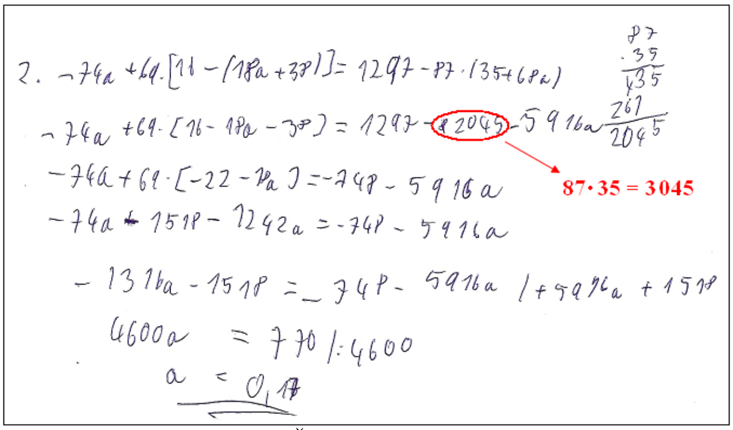
3. Záměna dělence s dělitelem (viz obr. č. 36):



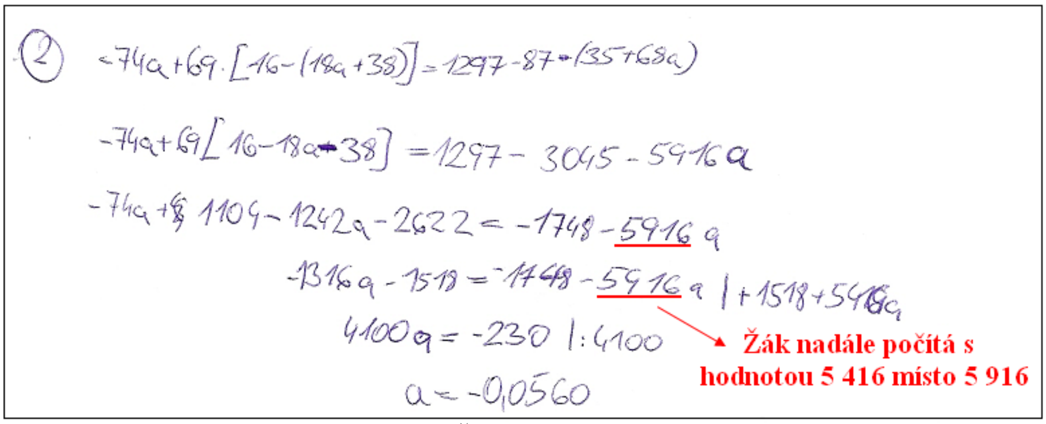
Obr. č. 36: Část práce žáka Petra

Úloha č. 2 – Při řešení této úlohy docházelo spíše k nepozornosti žáků, nebo špatným ekvivalentním úpravám:

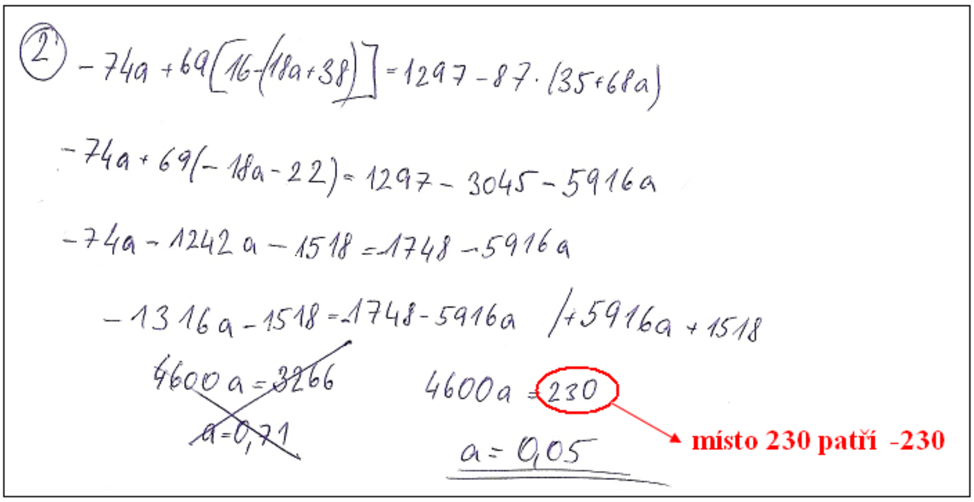
1. Nepozornost: při nepozornosti žáci špatně opsali výsledek z kalkulačky (viz obr. č. 37), díky nečitelnosti zaměnili některé číslice (viz obr. č. 38), nebo zapomněli na znaménko (viz obr. č. 39).



Obr. č. 37: Část práce žáka Vojtěcha

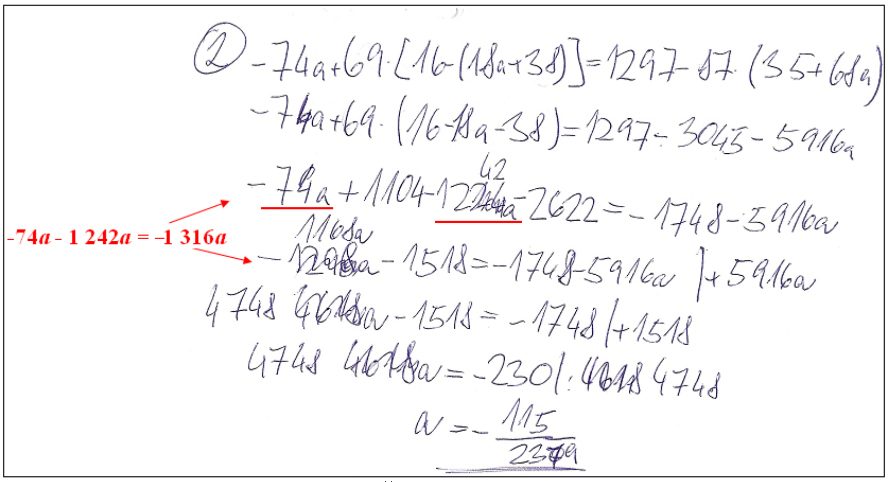


Obr. č. 38: Část práce žáka Ondřeje



Obr. č. 39: část práce žákyně Kamily

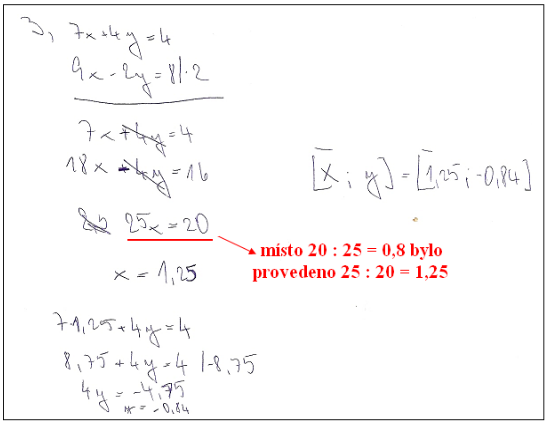
2. Špatné sčítání, odčítání, roznásobení: V důsledku špatně provedených ekvivalentních úprav docházelo u žáků ke špatnému řešení rovnic (viz obr. č. 40).



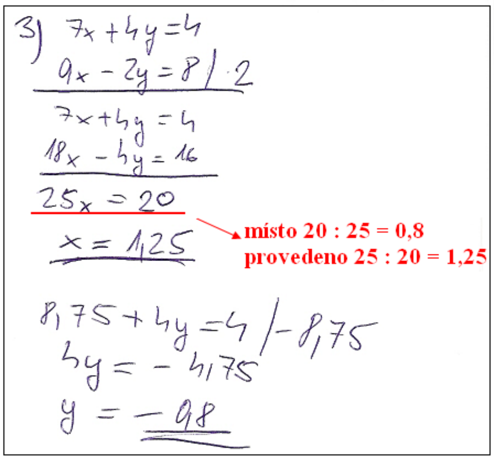
Obr. č. 40: Část práce žákyně Soni

Úloha č. 3 – Nejčastějším problémem u této úlohy byla opět záměna dělence s dělitelem, nebo vypočítání pouze jedné z neznámých:

1. Záměna dělence s dělitelem: Tento problém nastal v celé práci žáka Petra a ještě několika dalších (viz obr. č. 41, 42).

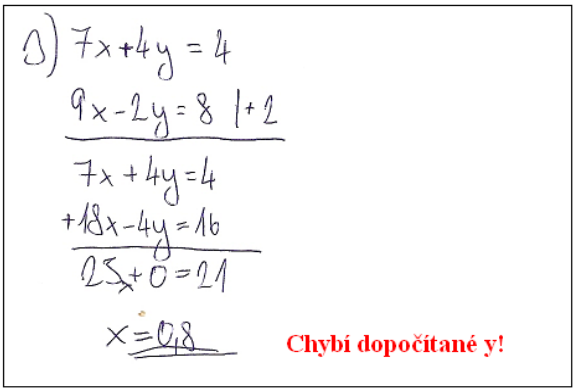


Obr. č. 41: Část práce žáka Michala



Obr. č. 42 – Část práce žáka Petr

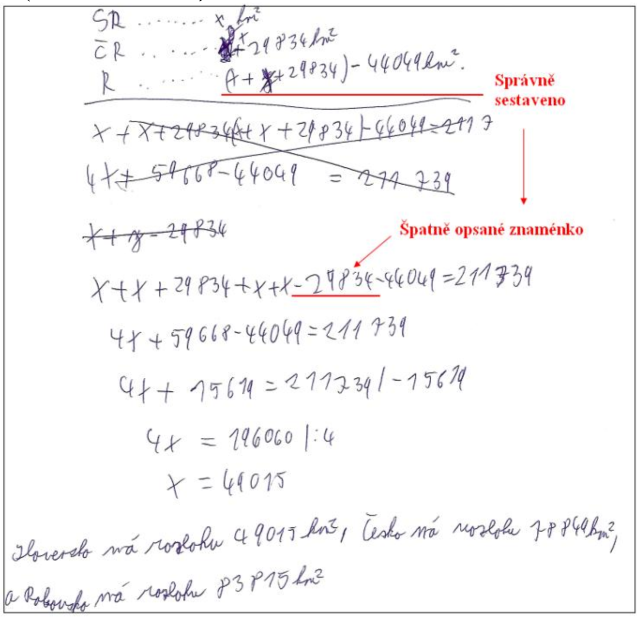
2. Vypočítaná pouze jedna neznámá: Žáci sice správně spočítali jednu z neznámých, avšak nedopočítali neznámou druhou (viz obr. č. 43).



Obr. č. 43: Část práce žáka Marka

Úloha č. 4 – Při řešení slovní úlohy docházelo u žáků k nepozornosti při jejím sestavování, nebo úlohu žáci zcela vynechali.

1. Nepozornost: Někteří žáci správně určili pomocí neznámé rozlohu jednotlivých států, avšak z nepozornosti sestavili konečnou rovnici nesprávně (viz obr. č. 44).

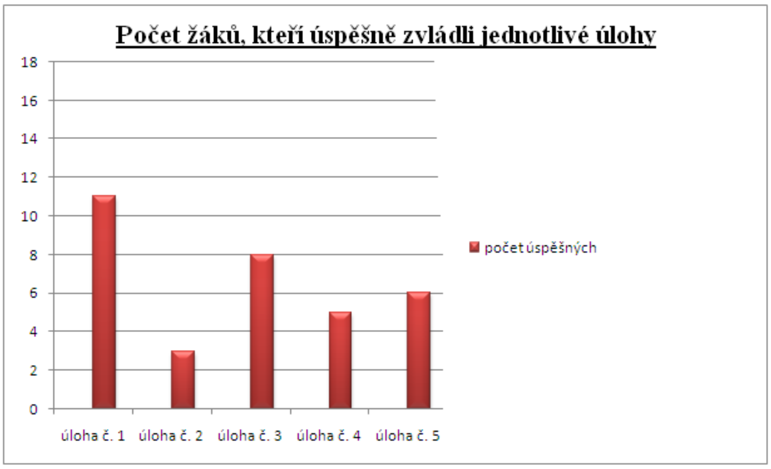


Obr. č. 44: Část práce žáka Vojtěcha

Úloha č. 5 – v této úloze jsem nemohla sledovat u žáků nejčastější chyby. Žáci, kteří úkol řešili, ho vyřešili správně, ostatní žáci úkol vynechali.

Závěrečné zhodnocení

V důsledku nepozornosti žáků docházelo při řešení rovnic k chybám týkajících se nejčastěji záměny číslic, špatným odečtením, nebo sečtením, popřípadě nesprávným opsáním výsledku z kalkulačky. Někteří z nich si neosvojili základní ekvivalentní úpravy a zaměňovali tak pozici dělence s dělitelem. Velmi často také docházelo k záměně dělení s odčítáním, nebo násobením. S ohledem na statistiky výsledků testů by měl být kladen větší důraz na procvičení dané látky. Jak je patrné z grafu č. 3, žádný úkol nebyl splněn všemi žáky.



Graf č. 3: Jednotlivé úkoly

Závěr

Ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace klademe důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Poskytujeme žákům vědomosti a dovednosti, které uplatní nejen v praktickém životě, ale také při dalším studiu. V tematickém okruhu Číslo a proměnná, kam také spadá předmět diplomové práce, ukazujeme žákům, jak provádět aritmetické operace, učíme je algoritmickému porozumění tak, aby byli schopni pochopit, proč je operace prováděna předloženým postupem. K tomu, abychom mohli názorně ukazovat postup při řešení jednotlivých příkladů, je nezbytně nutné pochopit i teorii související s tématem. (VÚT Praha, 2007)

Cílem teoretické části bylo rozpracování tématu jak z pohledu vyšší matematiky, tak z pohledu matematiky na 2. stupni základní školy. V teoretické části jsem utřídila základní poznatky o lineárních rovnicích a jejich soustavách a v úzké návaznosti na ně jsem je rozebrala v širším kontextu. Dále jsem se zabývala problematikou funkcí se zaměřením na lineární funkce, které bez pochyby s tématem lineárních rovnic souvisí. Ve vyšší matematice jsem poukázala na možnost rozšíření tématu do vyšších úrovní. Názorně jsem ukázala postup při řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých. Kapitoly v teoretické části na sebe plynule navazují, což umožňuje čtenářovi lepší orientaci v dané problematice.

Cílem praktické části bylo vytvořit sbírku úloh pro 2. stupeň základní školy na dané téma. Sbírka úloh, která je obsažena v této diplomové práci, tvoří soubor názorně řešených příkladů. Názornost je úzce spojena se samotným vznikem výchovy, avšak ne vždy nacházela náležité docenění, např. u scholastické školy. V dnešním vzdělávání hraje však významnou roli, její správné uplatňování přispívá k úspěšné realizaci vzdělávacího procesu.

Pro naplnění výše zmíněných cílů jsem využila následující **metody**:

- obsahová analýza odborných pramenů;
- porovnávání odborných pramenů;
- analýza RVP ZV a ŠVP ZŠ Valeč;
- didaktická transformace učebních úloh;
- odborná konzultace s vedoucí diplomové práce a konzultantem;
- empirické šetření na základní škole;
- hodnocení testů aplikovaných na ZŠ ve Valči.

Vladimíra Spilková tvrdí (Spilková, 2005), že výuka matematiky trpí snahou rychle přistoupit k nácvikům sčítacích a odčítacích spojů a zanedbává propojení na životní zkušenosti žáků. To se později může projevit neschopností žáků řešit slovní úlohy a používat matematiku pro modelování reálných situací. Slovní úlohy, k jejichž řešení se využívají rovnice, patří k tomu nejobtížnějšímu (ale také nejzajímavějšímu), co matematika na základní škole nabízí. Ve sbírce nalezneme rovněž soubor slovních úloh, které zasahují do praktického života i do ostatních vzdělávacích oborů.

Z vytvořené sbírky jsem sestavila čtyři varianty testů, z nichž jedna byla pokusně nasazena v rámci předmětu matematika na ZŠ ve Valči.

Z empirického šetření vyplývá, že většina žáků neměla řádně procvičené učivo, neosvojila si základní ekvivalentní úpravy a tím chybovala. Na základě výsledků tohoto šetření bych doporučila věnovat se více procvičování jednoduchých příkladů před tím, než se přistoupí k těm složitějším, neboť k jejich úspěšnému řešení je nutné dostatečné pochopení principu ekvivalentních úprav.

Mluvíme-li o motivaci, obyčejně myslíme hru, anekdotu, historku, vtipnou úlohu, která aspoň na určitou dobu upoutá pozornost žáka. Motivaci můžeme ale chápat mnohem hlouběji, jako něco, co dlouhodobě zaujme zájem žáka. K tomu, aby žák udržel trvalejší zájem o činnost, musí pociťovat tuto činnost jako něco obohacujícího, přínosného, radostného. Informační a komunikační technologie sehrávají v životě žáků důležitou roli. Poskytují jim prostředí, které jim neubližuje, ale zároveň je láká a přitahuje. Praktická část mimo jiné obsahuje soubor počítačových didaktických testů, které přispívají k netradičnímu pojetí výuky na základní škole. Prostřednictvím počítačových testů žák pracuje v příjemném prostředí, dostává okamžitou zpětnou vazbu a zároveň si procvičuje učivo.

Věřím, že tato diplomová práce pomůže nejen učitelům propojit vzdělávací obor Matematika a její aplikace s ostatními vzdělávacími obory, ale že bude i vítaným pomocníkem žáků při procvičení lineárních rovnic a jejich soustav.

Seznam použité literatury

BICAN, L. *Lineární algebra a geometrie*. 2. vydání. Praha : Academia, 2009. 303 s. ISBN 978-80-1707-9.

BUBENÍČEK, F. *Mathematic for engineers*. 1. vydání. Praha : Nakladatelství ČVUT, 2007. 324 s. ISBN 978-80-01-03792-8.

BUČKO, M. – BUŠA, J. – SCHRÖTTER. *Lineárna algebra*. 1. vydání. Košice : Rektorát Technickej univerzity v Košiciach, 1991. 129 s.

ČERNOCHOVÁ, M. – KOMRSKA, T. – NOVÁK, J. *Využití počítače při vyučování: náměty pro práci dětí s počítačem.* Praha : Portál, 1998. 165 s. ISBN 80-7178-272-6.

DEMLOVÁ, M. – NAGY, J. *Algebra*. 1. vydání. Praha : SNTL, 1982. 192 s.

FUCHS, E. – HOSPEŠOVÁ, A. – LIŠKOVÁ, H. *Postavení matematiky ve školním vzdělávacím programu: Základní vzdělávání*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 2006. 79 s. ISBN 80-7196-326-7.

HAVIAR, A. – HRNČIAR, P. – KLENOVČAN, P. *Algebra I.* 1. vydání. Banska Bystrica : Pedagogická fakulta v Banskej Bystrici, 1991. 164 s.

HOLENDA, J. – HAVEL, V. *Lineární algebra*. 1. vydání. Praha : SNTL, 1984. 340 s.

CHUDÝ, J. *Determinanty a matice*. 2. vydání. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1974. 216 s.

JARNÍK, J. – ŠISLER, M. *Jak řešit rovnice a jejich soustavy*. 1. vydání. Praha : Nakladatelství technické literatury, 1969. 244 s.

JIRÁSEK F. – BRANIŠ K. – HORÁK, S. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 5. vydání. Praha : Prometheus, 2008. 361 s. ISBN 978-80-7196-349-3.

KADLEČEK. J. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. 1. vydání. Praha : Prometheus. 1996. 327 s. ISBN 80-7196-017-9.

KLŮFA, J. – COUFAL, J. *Matematika*. 1. vydání. Praha: Ekopress, 2003. 222 s. ISBN 80-86119-76-9.

KOČÁNDRLE, M. – BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 3. vydání. Praha : Prometheus, 2008. 220 s. ISBN 978-80-7196-163-5.

KOČANDRLE, M. – BOČEK, L. *Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie*. 2. vydání. Praha : Prometheus, 1999. 220 s. ISBN 80-7196-163-9.

MALEC, M. *Elementární matematika*. 1. vydání. Praha : Vysoká škola hotelová v Praze 8, 2007. 81 s. ISBN 978-80-86578-62-0.

MIKULČÁK, J. *Přehled učiva matematiky základní školy*. 1. vydání. Praha : Státní nakladatelství Praha, 1993. 257 s. ISBN 80-04-26357-7.

MŠMT. *Školská reforma pokračuje: Vzdělávání v roce 2008 v datech*. 1. vydání. Praha : Tauris, 2009. 121 s. ISBN 978-80-211-0584-3.

ODVÁRKO, O. – ŘEPOVÁ, J. *Matematika 3.část: pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 1996. 200 s. ISBN 80-7196-039-X.

ODVÁRKO, O. *Matematika: Sbírka úloh pro gymnázia*. 1. vydání. Praha : Prometheus, 2000. 112 s. ISBN 80-7196-050-0.

POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 9. vydání. Praha : Prometheus, 2008. 659 s. ISBN 978-80-7196-356-1.

POLÁK, J. *Středoškolská matematika v úlohách I*. 2.vydání. Praha : Prometheus, 2006. 371 s. ISBN 80-7196-337-2.

PRŮCHA, J. – WALTEROVÁ, E. – MAREŠ, J. *Pedagogický slovník*. Praha : Portál, 1998. 322 s. ISBN 80-7178-252-1.

REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky* I. 7. vydání. Praha : Prometheus, 2007. 720 s. ISBN 978-80-7196-179-6.

REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky II*. 7. vydání. Praha : Prometheus, 2003. 874 s. ISBN 80-7196-181-7.

ROHN, J. *Lineární algebra a optimalizace*. 1. vydání. Praha : Karolinum, 2004. 199 s. ISBN 80-246-0932.0.

SPILKOVÁ, V. Proměny primárního vzdělávání v ČR. 1. vydání. Praha : Portál, 2005. 311 s. ISBN 80-7178-942-9.

SVÄTOKRÍŽNY, P. *Lineárna algebra v úlohách*. 1. vydání. Bratislava : Alfa, 1985. 472 s.

ŠMARDA, B. *Lineární algebra*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1982. 192 s.

VÚP PRAHA. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. 1. 7. 2007 [cit. 2010-10-29]. Dostupné z <http://rvp.cz/informace/dokumenty-rvp>.

ZŠ Valeč. *Školní vzdělávací program*. 2. vydání. Valeč : ZŠ Valeč, 2009.

ZOULEK, J. *ICT v životě základních škol*. 1. Vydání. Praha : Triton, 151 s. ISBN 80-7254-858-1.

ŽENATÁ, E. *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením: pro 6. – 9. ročník ZŠ a odpovídající ročníky víceletých gymnázií*. 1. vydání. Benešov : Blug, [2008]. 552 s. ISBN 978-80-7274-988-1.

Seznam literatury pro sbírku úloh

Číselné údaje pro př. 1 z kapitoly 11.6.1. čerpány z:

- ŠLACHTA, M. *Zeměpis světa*. 1. vydání. Praha : Slovart, 1997. 303 s. ISBN 80-7209-027-5.

Číselné údaje pro př. 2 z kapitoly 11.6.1. čerpány z:

- WIKIPEDIA.CZ. *Česká republika* [online]. 25.02.2010 [cit. 2010-02-27]. Dostupné z <http://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cesk%C3%A1_republika>.
- WIKIPEDIA.CZ. *Polsko* [online]. 25.02.2010 [cit. 2010-02-27]. Dostupné z < http://cs.wikipedia.org/wiki/Polsko>.
- WIKIPEDIA.CZ. *Německo* [online]. 25.02.2010 [cit. 2010-02-27]. Dostupné z < http://cs.wikipedia.org/wiki/N%C4%9Bmecko>.
- WIKIPEDIA.CZ. *Slovenská republika* [online]. 25.02.2010 [cit. 2010-02-27]. Dostupné z <http://cs.wikipedie.org/wiki/Slovensk%C3%A1_republika>.

Číselné údaje pro př. 3 z kapitoly 11.6.1. čerpány z:

- ANDĚRA, M. *Ohrožená zvířata*. 1. vydání. Praha : Aventinum, 1998. 180 s. ISBN 80-7151-061-0.

Číselné údaje pro př. 4 z kapitoly 11.6.1. čerpány z:

- KRÁL, V. *Svět, v němž žijeme: Evropa*. 1. vydání. Praha : Euromedia Group, 2004. 79 s. ISBN 80-242-1115-7.

Číselné údaje pro př. 1 z kapitoly 11.6.2. čerpány z:

- ANDĚRA, M. – ANDĚROVÁ R. *Zvířata světa*. 2. vydání. Český Těšín : Finidr, 2004. 228 s. ISBN 80-253-0000-5.

Inspirační literatura:

- BĚLOUN, F. et al. *Běloun: Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vydání. Praha : Prometheus, 1998. 254 s. ISBN 80-7196-104-3.
- BUŠEK, I. – MŰLLEROVÁ, J. *Přijímací zkoušky z matematiky na střední školy*. 2. vydání. Praha : Fortuna, 1993. ISBN 80-7168-073-7.
- CALDA, E. – PETRÁNEK, O. – ŘEPOVÁ, J. *Matematika: pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 195 s. ISBN 80-04-24919-1.
- CZUDEK, P. et al. *Slovní úlohy řešené rovnicemi: pro žáky a učitele ZŠ, studenty a profesory SŠ*. 3. vydání. Praha : Sdružení podnikatelů HAV, 2005. 153 s. ISBN 80-903625-0-8.
- DYTRYCH, M. *Sbírka úloh MATEMATIKA: Příprava k přijímacím zkouškám na střední školy, procvičení učiva základní školy*. 1. vydání. Praha : Fortuna, 2004. 238 s. ISBN 80-7168-891-6.
- JANOTA, V. *Slovní úlohy: Já na to mám … … já se to naučím*. 1. vydání. Praha : Fragment, 2004. 77 s. ISBN 80-7200-904-4.
- PILÁT, V. *Sbírka úloh z fyziky*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1966. 117 s.

- ROBOVÁ, J. *Řešené příklady z matematiky pro základní školy, pro osmiletá gymnázia*. 1. vydání. Praha : ASPI Publishing, 2004. 647 s. ISBN 80-7357-039-4.
- ŽENATÝ, E. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník s klíčem*. 1. vydání. [Praha]: Blug, [2002?]. 160 s. ISBN 80-7274-933-1.

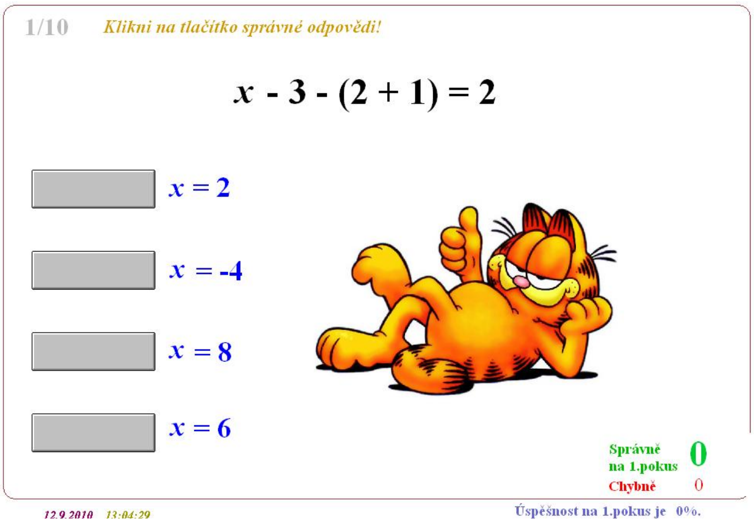
Přílohy

Příloha č. 1 – Didaktický test č. 1
Příloha č. 2 – Didaktický test č. 2
Příloha č. 3 – Didaktický test č. 3
Příloha č. 4 – CD-ROM s didaktickými testy v autorském systému Macromedia Authorware
Příloha č. 5 – Varianta testu A
Příloha č. 6 – Varianta testu B
Příloha č. 7 – Varianta testu C
Příloha č. 8 – Varianta testu D
Ukázka žákovských prací:
Příloha č. 9 – Vypracovaná práce žákyně Kamily
Příloha č. 10 – Vypracovaná práce žáka Marka
Příloha č. 11 – Vypracovaná práce žáka Pavla
Příloha č. 12 – Vypracovaná práce žákyně Soni

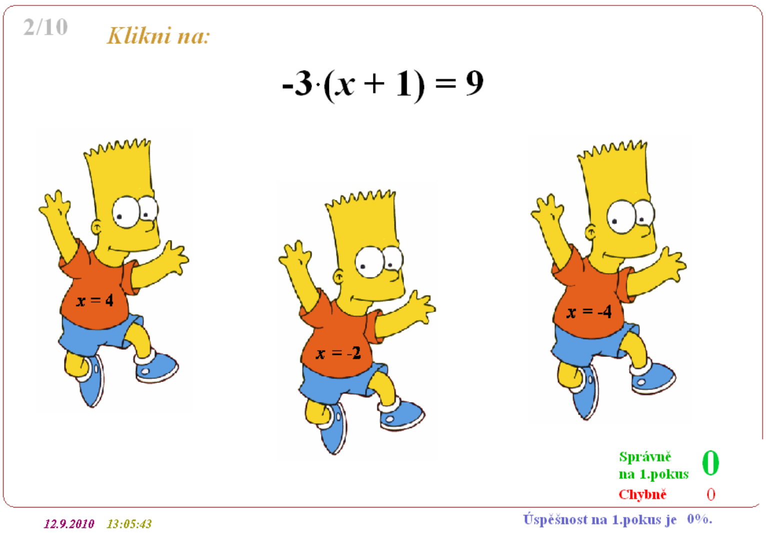
Příloha č. 1 - Didaktický test 1

Přihlášení:

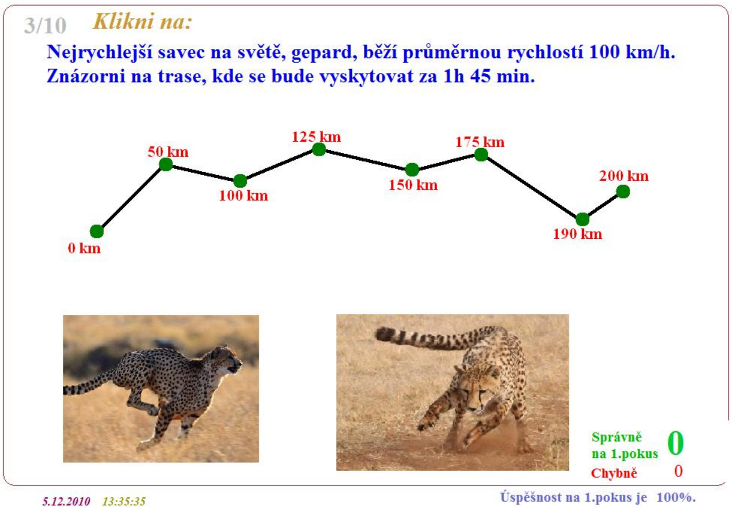
Úloha č. 1:



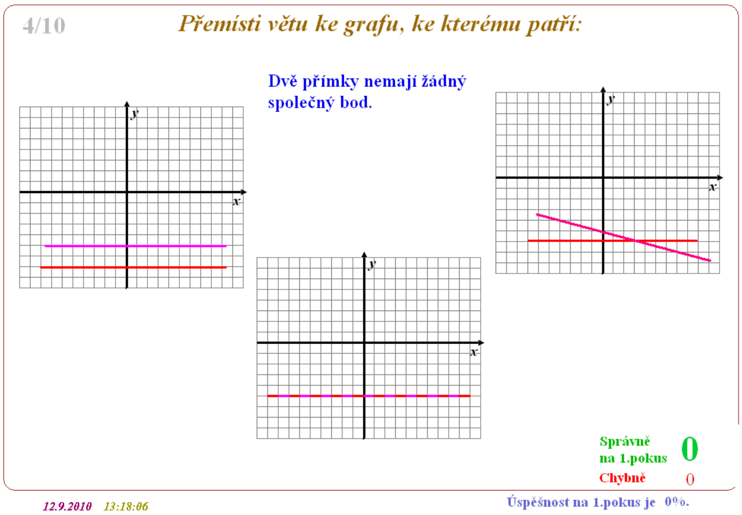
Úloha č. 2:



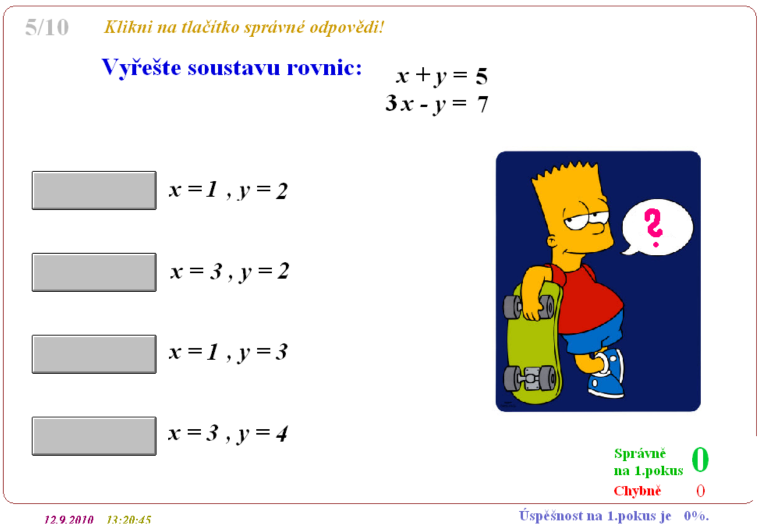
Úloha č. 3:



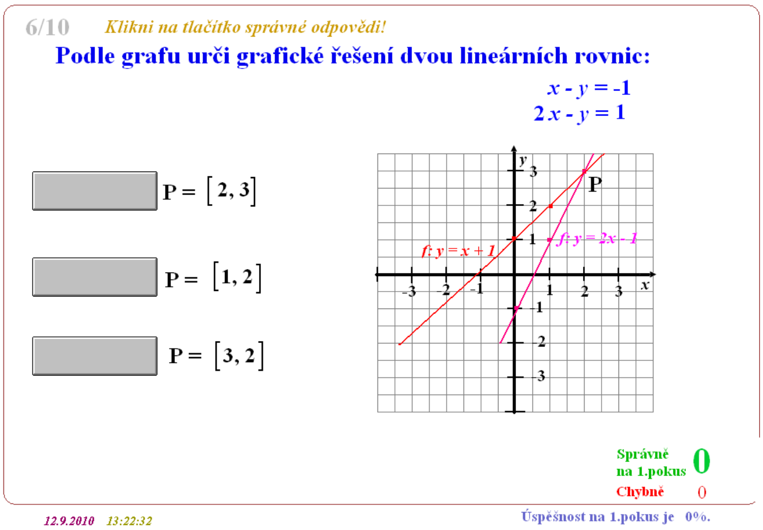
Úloha č. 4:



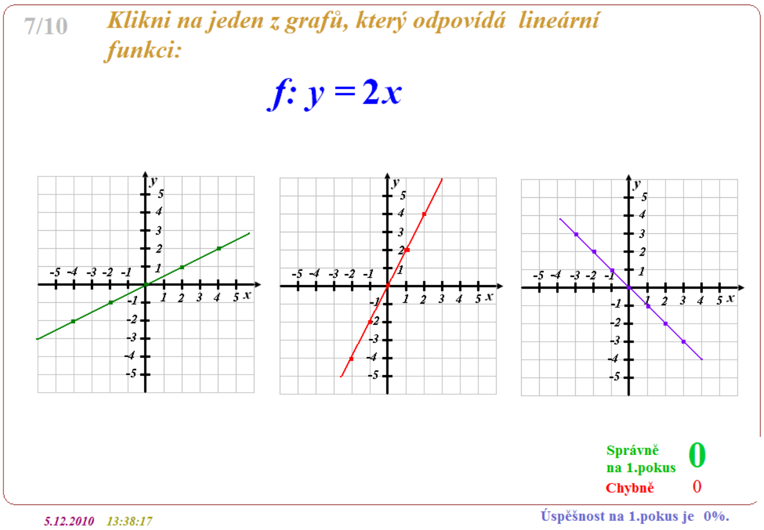
Úloha č. 5:



Úloha č. 6:



Úloha č. 7:



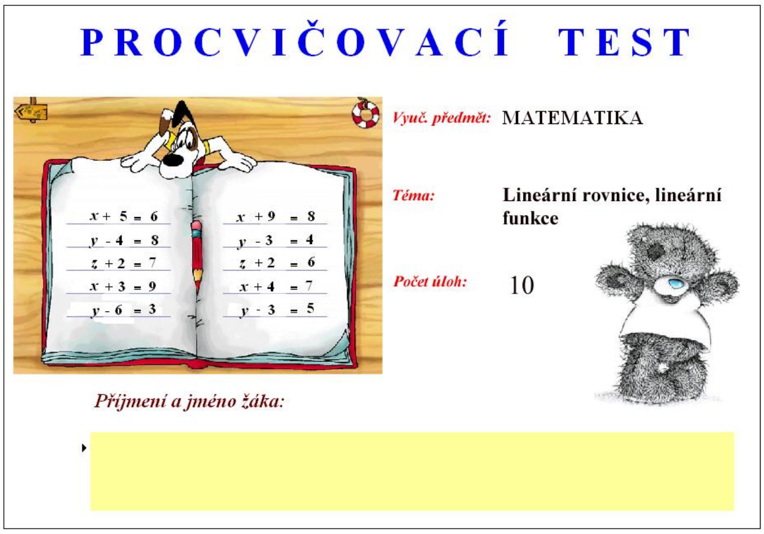
Úloha č. 8:

Úloha č. 9:

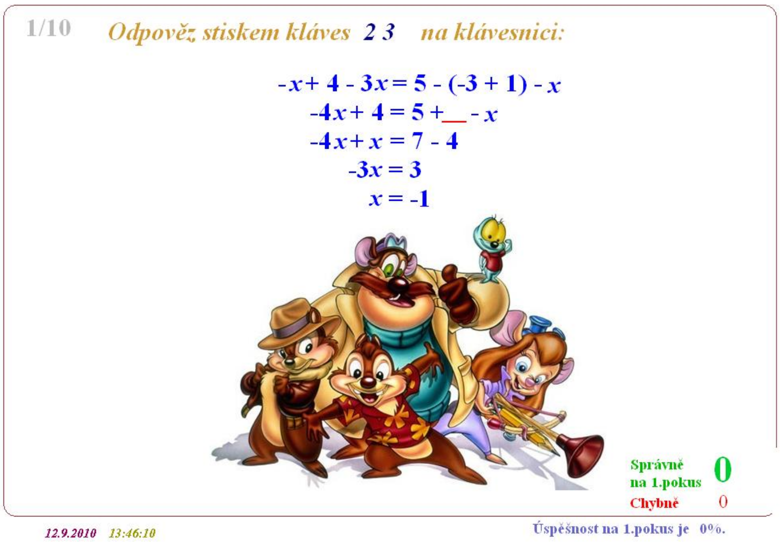
Úloha č. 10:

Příloha č. 2 – Didaktický test 2

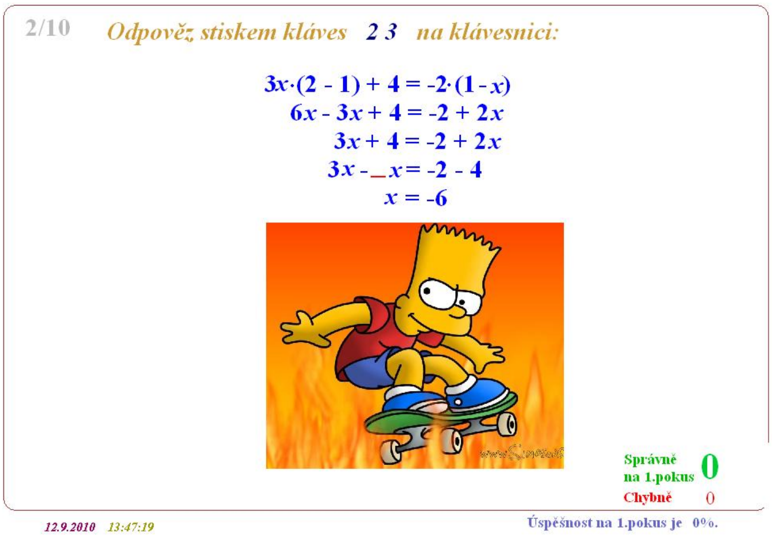
Přihlášení:



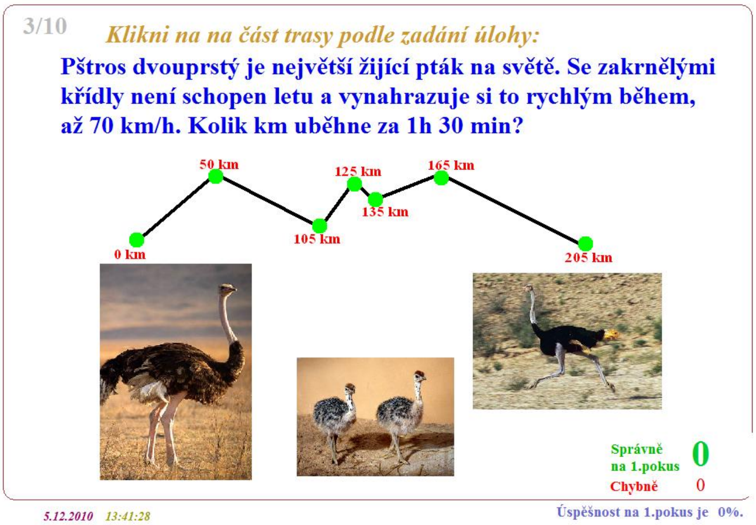
Úloha č. 1:



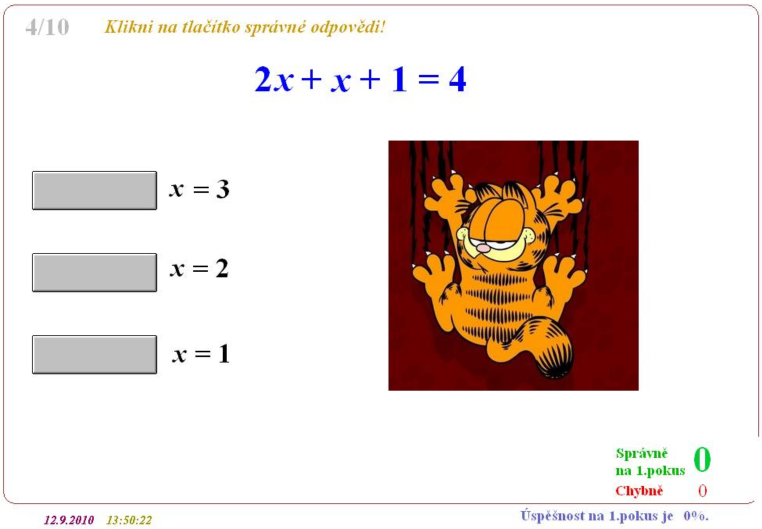
Úloha č. 2:



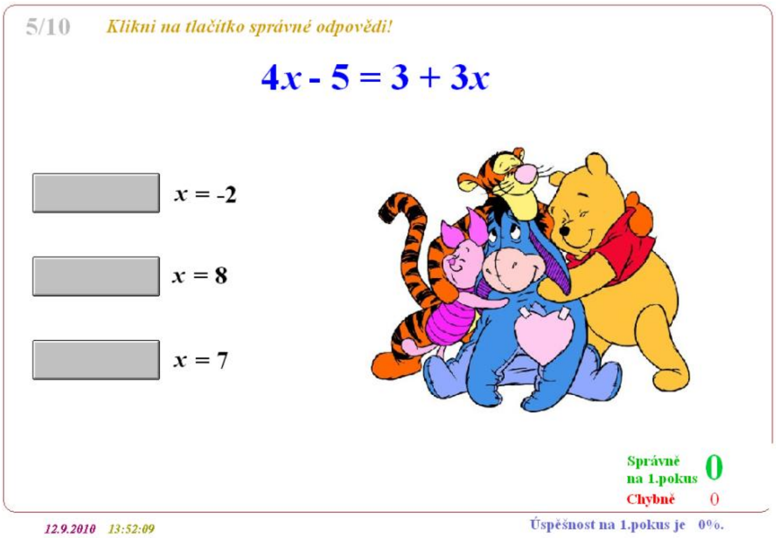
Úloha č. 3:



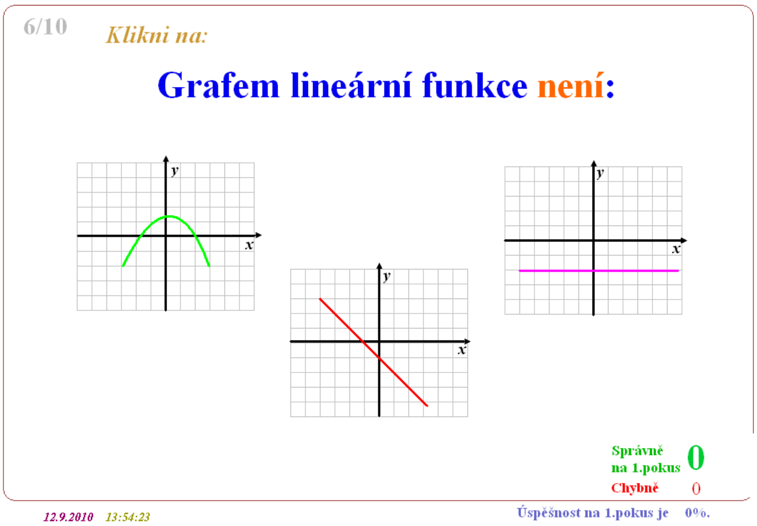
Úloha č. 4:



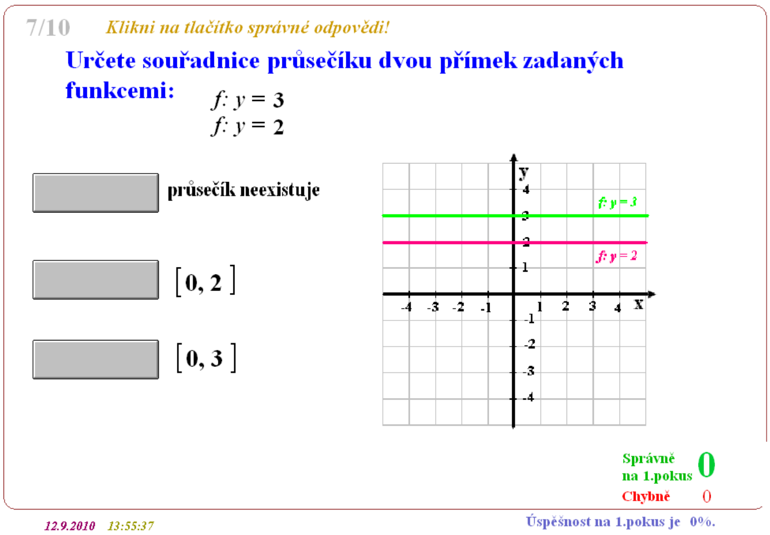
Úloha č. 5:



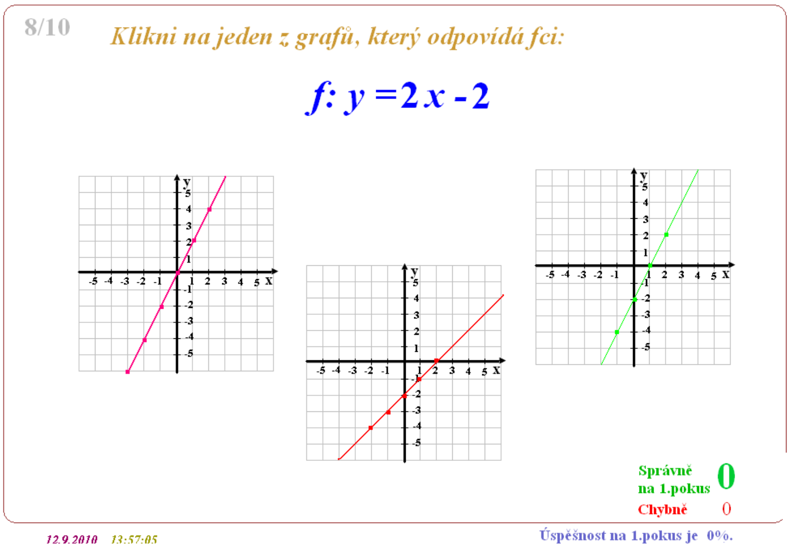
Úloha č. 6:



Úloha č. 7:



Úloha č. 8:

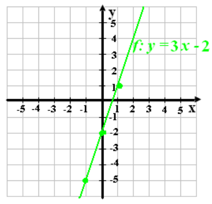


Úloha č. 9:

9/10 *Odpověz stiskem kláves* ***2 4*** *na klávesnici:*

Podle grafu doplň do tabulky chybějící políčko.

x	-1	0	1	2
y	-5	-2	1	



Správně na 1.pokus 0

Chybně 0

12.9.2010 13:58:41

Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 10:

10/10 *Klikni na tlačítko správné odpovědi!*

Doplň y-nové souřadnice zadané lineární funkce podle tabulky.

$$f: y = 3x - 4$$

x	-1	0	1	2
y				

x	-1	0	1	2
y	7	-4	-1	4

x	-1	0	1	2
y	-7	-4	1	2

x	-1	0	1	2
y	-7	-4	-1	2

x	-1	0	1	2
y	-1	-4	-1	2

Správně na 1.pokus 0

Chybně 0

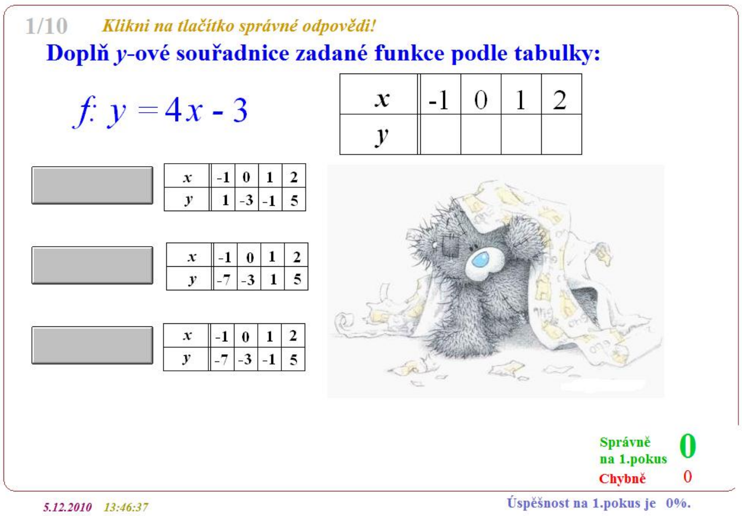
5.12.2010 13:44:41

Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

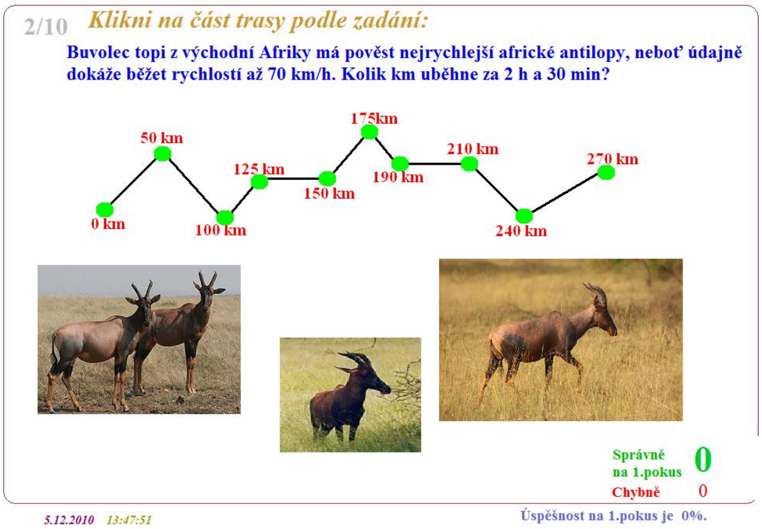
Příloha č. 3 – Didaktický test 3

Přihlášení:

Úloha č. 1:



Úloha č. 2:



Úloha č. 3:

3/10 *Klikni na tlačítko správné odpovědi!*

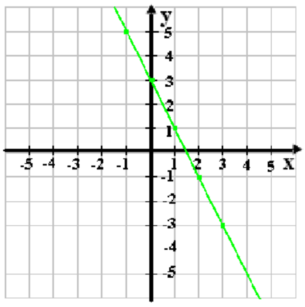
Doplň x-ové a y-ové souřadnice v tabulce podle grafu lineární funkce:

x	-1			2	
y		3	1		-3

x	-1	0	1	2	3
y	5	3	1	-1	-3

x	-1	0	1	2	4
y	5	3	1	-1	-3

x	-1	0	1	2	3
y	4	3	1	-1	-3



Správně na 1.pokus 0
Chybně 0

5.12.2010 13:49:30 Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 4:

4/10 *Odpověz stiskem kláves 2 6 na klávesnici:*

Doplňte číslo místo červené mezery tak, aby soustava rovnic byla řešená správně. (Soustava je řešena sčítací metodou.)

$$2x - y = 9$$
$$4x + y = 3$$
$$\_\,x = 12$$
$$x = 2 \longrightarrow 2x - y = 9$$
$$2\cdot 2 - y = 9$$
$$-y = -5$$
$$y = 5$$

Správně na 1.pokus 0
Chybně 0

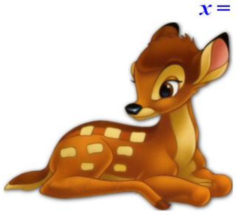
5.12.2010 13:51:17 Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 5:

5/10 *Odpověz stiskem kláves 1 2 na klávesnici:*

Doplňte číslo místo červené mezery tak, aby soustava rovnic byla řešená správně. (Soustava je řešena sčítací metodou.)

$$3x + y = 1$$
$$4x - 2y = 8$$
$$6x + 2y = 2$$
$$4x - 2y = 8$$
$$10x = \_\,0$$
$$x = 1 \longrightarrow 3x + y = 1$$
$$3 + y = 1$$
$$y = -2$$



Správně na 1.pokus 0
Chybně 0

5.12.2010 13:52:49 Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 6:

6/10 *Klikni na tlačítko správné odpovědi!*

Mezi nejvíce ohrožená zvířata na světě patří jak divoký a nosorožec. V současné době se vyskytuje na světě přibližně 10 000 jaků divoků. Kolik nosorožců se vyskytuje přibližně na světě, víte-li, že jich je o 70 % méně než jaků divokých.

přibližně 7 000

přibližně 3 000

přibližně 5 000

Správně na 1.pokus 0

Chybně 0

5.12.2010 13:54:24

Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 7:

7/10 *Klikni na tlačítko správné odpovědi!*

Mezi nejznámější zoologickou zahradu světa patří Zoo v Basiley ve Švýcarsku, která má přibližně 6 000 zvířat. Kolik druhů zvířat má tato zoo, víme-li, že druhy tvoří 10 % z celkové počtu zvířat.

60 druhů

100 druhů

600 druhů

Správně na 1.pokus 0

Chybně 0

5.12.2010 13:56:05

Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 8:

8/10 *Klikni na místo, ve kterém je rovnice řešena nesprávně: (při špatném kliknutí se objeví červeně podtržený řádek a v něm nalezni chybu).*

$$5 - \left[x\cdot(2-1)+3\right] = 7 - \left[(x+1)\cdot(-2)\right] + x$$
$$5 - \left[2x - x + 3\right] = 7 - \left[-2x - 2\right] + x$$
$$5 - \left[x + 3\right] = 7 + 2x - 2 + x$$
$$5 - x - 3 = 5 + 3x$$
$$-x + 2 = 5 + 3x$$
$$-x - 3x = 5 - 2$$
$$-4x = 3$$
$$x = -\frac{3}{4}$$

Správně na 1.pokus 0

Chybně 0

12.9.2010 14:15:06

Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 9:

9/10 *Klikni na místo, ve kterém je rovnice řešena nesprávně: (při špatném kliknutí se objeví červeně podtržený řádek a v něm nalezni chybu).*

$$x - 3\cdot(5 + x) = [(x + 1)\cdot(-2) + x] - 1$$
$$x - 15 - 3x = [-2x - 2 + x] - 1$$
$$-2x - 15 = -x - 2 - 1$$
$$-2x - x = -3 + 15$$
$$-3x = 12$$
$$x = -4$$

Správně na 1.pokus 0
Chybně 0

12.9.2010 14:16:31 Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Úloha č. 10:

10/10 *Klikni na místo, ve kterém je soustava rovnic řešena nesprávně: (při špatném kliknutí se objeví červeně podtržený řádek a v něm nalezni chybu).*

$$2x + 7y = -2$$
$$x + 3y = 3 \qquad / (-2)$$
$$2x + 7y = -2$$
$$-2x - 6y = -6$$
$$y = -8 \longrightarrow x + 3y = 3$$
$$x + 3\cdot 8 = 3$$
$$x + 24 = 3$$
$$x = -21$$

Správně na 1.pokus 0
Chybně 0

12.9.2010 14:17:50 Úspěšnost na 1.pokus je 0%.

Příloha č. 4 – CD-ROM s didaktickými testy v autorském systému Macromedia Authorware

Příloha č. 5 – Varianta testu A

Varianta A Jméno a Příjmení: …………………………..

Třída: ………

Téma: Lineární rovnice a jejich soustavy

1. Vyřešte následující rovnici, proveďte zkoušku:

$$(1{,}3+0{,}6)\cdot v=4{,}2-0{,}4$$

2. Řešte následující rovnici:

$$-74a+69\cdot[16-(18a+38)]=1297-87\cdot(35+68a)$$

3. Řešte následující soustavu rovnic:

$$7x+4y=4$$
$$9x-2y=8$$

4. Rozloha Rakouska, České republiky a Slovenska je dohromady 211 739 km^2. Přičteme-li k rozloze Slovenska 29 834 km^2, získáme rozlohu České republiky. Odečteme-li od součtu rozloh České republiky a Slovenska 44 049 km^2, získáme rozlohu Rakouska. Určete rozlohu všech států.

5. V balírně mají připravit směs kakaa tak, aby 1 kg stál 250 Kč. Na skladě jsou dva druhy kakaa v ceně 230 Kč za 1 kg a 310 Kč za 1 kg. Kolik kg každého druhu je třeba smíchat, abychom připravili 60 kg požadované směsi?

Příloha č. 6 – Varianta testu B

Varianta B Jméno a Příjmení: …………………………..

Třída: ………

Téma: Lineární rovnice a jejich soustavy

1. Vyřešte následující rovnici, proveďte zkoušku:

$$a - 2{,}3 \cdot (a - 0{,}7a) = 1{,}5 - 4{,}6$$

2. Řešte následující rovnici:

$$594y + 13 \cdot [228 - 68 \cdot (32y + 95)] = 526 + 94 \cdot (39 - 68y)$$

3. Řešte následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= -3 \\ -15x - 6y &= 9 \end{aligned}$$

4. Celková hustota zalidnění Polska, Německa, Slovenska a České republiky je 591 obyvatel na km^2. Přičteme-li k Polsku 10 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění v České republice. Odečteme-li od hustoty zalidnění v České republice 30 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění na Slovensku. Odečteme-li od dvojnásobku hustoty zalidnění v Polsku 14 obyvatel na km^2, získáme hustotu zalidnění v Německu. Určete hustotu zalidnění v jednotlivých státech. Který ze států má největší počet obyvatel na km^2?

5. Ve dvou sudech je nalito víno. Jestliže z prvního sudu nalijeme do druhého sudu právě tolik litrů vody, kolik v něm je, a potom z druhého sudu do prvního tolik litrů, kolik už je v prvním sudu, a opět z prvního sudu nalijeme do druhého sudu tolik litrů vína, kolik už je v něm, bude v každém sudu 120 l vína. Kolik litrů vína bylo v každém sudu na začátku?

Příloha č. 7 – Varianta testu C

Varianta C   Jméno a Příjmení: …………………………..
Třída: ………

Téma: Lineární rovnice a jejich soustavy

1. Vyřešte následující rovnici, proveďte zkoušku:

   $1{,}4y + 1{,}2y = 0{,}8 - (0{,}3 - 0{,}8)$

2. Řešte následující rovnici:

   $11 \cdot [4 \cdot (184 + 8z) + 43z] = 777z + 16 \cdot (3z + 564) - 928$

3. Řešte následující soustavu rovnic:

   $$\begin{aligned} 12x + 6y &= 3 \\ -4x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

4. Mezi nejvíce ohrožená zvířata na světě patří panda velká, nosorožec dvourohý a tuleň středomořský. Na celém světě se celkem vyskytuje přibližně 4 070 těchto zvířat. Odečteme-li od počtu pand velkých 720, získáme počet tuleňů středomořských. Přičteme-li k šestinásobku tuleňů 150, získáme počet nosorožců dvourohých. Určete přibližný počet těchto ohrožených zvířat na světě.

5. Dvěma přítoky nateče do nádrže za 8 minut 320 litrů vody. Přítokem o větším průměru nateče za 8 minut o 20 litrů více než přítokem o menším průměru za 12 minut. Kolik litrů vody nateče každým přítokem za jednu minutu?

Příloha č. 8 – Varianta testu D

Varianta D   Jméno a Příjmení: …………………………..
Třída: ………

Téma: Lineární rovnice a jejich soustavy

1. Vyřešte následující rovnici, proveďte zkoušku:

$$2x - 3 = 0,4 \cdot (1 - 2x) - 0,6$$

2. Řešte následující rovnici:

$$2 \cdot (3 - 2x) - 2 \cdot [x - (5 + 2x)] = x \cdot [4 - (3 + 5)] - 2$$

3. Řešte následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 14x - 7y &= -21 \\ -12x + 6y &= 18 \end{aligned}$$

4. Nejvyšší hory České republiky (Sněžka), Francie (Mont Blanc) a Španělka (Pico de Teide) mají společně 10 130 m n.m.. Sněžka je o 2 116 m n.m. nižší než Pico de Teide. Odečteme-li od čtyřnásobku výšky Sněžky 1 598 m n.m., zjistíme výšku Mont Blanc. Určete výšky nejvyšších hor uvedených států a určete z nich tu nejvyšší.

5. Ze dvou pájek, z nichž jedna obsahuje 44 % mědi a 56 % zinku a druhá obsahující 52 % mědi a 48 % zinku, máme vyrobit 40 kg pájky o obsahu 45 % mědi a 55 % zinku. Vypočítejte hmotnost obou pájek ve směsi?

Příloha č. 9 – Vypracovaná práce žákyně Kamily

① $(1,3+0,6)x = 4,2-0,4$

$1,9x = 3,8$

$x = 2$

ZK: $(1,3+0,6)\cdot 2 = 4,2-0,4$

$1,9\cdot 2 = 3,8$

$3,8 = 3,8$

$L_{(2)} = P_{(2)}$

② $-74a + 69[16-(18a+38)] = 1297 - 87\cdot(35+68a)$

$-74a + 69(-18a-22) = 1297 - 3045 - 5916a$

$-74a - 1242a - 1518 = -1748 - 5916a$

$-1316a - 1518 = -1748 - 5916a \quad /+5916a + 1518$

$\cancel{4600a = 3266}$

$\cancel{a = 0,71}$

$4600a = 230$

$a = 0,05$

③

① $7x+4y=4$

② $9x-2y=8 \quad |\cdot 2$

① $7x+4y=4$

② $18x-4y=16$

$25x=20$

$x=0,8$

$7\cdot 0,8+4y=4$

$4y=4-5,6$

$4y=-1,6$

$y=0,4$

ZK1 $7\cdot 0,8+4\cdot(-0,4)=4$

$5,6-1,6=4$

$4=4$

$L_{(1)}=P_{(1)}$

ZK2 $9\cdot 0,8-2\cdot(-0,4)=8$

$7,2+0,8=8$

$8=8$

$L_{(2)}=P_{(2)}$

$[x; y]=[0,8; -0,4]$

④ R+ČR+S .... 211.739 km²

~~ČZ~~

S .... x km²

ČR ...... x+29.834 km²

R ..... (x+x+29.834) − 44.049 km²

$x+x+29.834+(x+x+29.834)-44.049=211.739$

$4x+15.619=211.739 \quad |-15.619$

$4x=196.120$

$x=49030$ km²

211 739
49.030
78.864
83.845

Rozloha Slovenska je 49.030 km², České republiky 78.864 km² a Rakouska 83.845 km².

⑤ 1. druh . . . 1 kg . . . 230 Kč . . . x kg   45 $45 \cdot 230 = 10350$
2. druh . . . 1 kg . . . 310 Kč . . . y kg   15 $15 \cdot 310 = 4650$
celkem . . . 1 kg . . . 250 Kč . . . 60 kg   60 $60 \cdot 250 = 15000$

$$x + y = 60 \quad / \cdot (-230)$$
$$230x + 310y = 15000$$

$$-230x - 230y = -13800$$
$$230x + 310y = 15000$$

$$80y = 1200$$
$$\underline{y = 15}$$

$$x + 15 = 60$$
$$x = 60 - 15$$
$$\underline{x = 45 \text{ kg}}$$

1. druhu (á 230 Kč) mají dát 45 kg a
2. druhu (á 310 Kč) mají dát 15 kg.

Příloha č. 10 – Vypracovaná práce žáka Marka

1) $(1{,}3+0{,}6)\cdot v = 4{,}2-0{,}4$

$1{,}9\cdot v = 3{,}8$

$\underline{\underline{v = 2}}$

ZK: $(1{,}3+0{,}6)\cdot 2 = 4{,}2-0{,}4$

$3{,}8 = 3{,}8$

$L(2) = P(2)$

2)

$-74a+69\cdot[16-(1{,}8a+38a)] = 1297-87\cdot(35+68a)$

$-74a+69\cdot(16-1{,}8a+38) = 1297-87\cdot(35+68a)$

$-74a+1104-124{,}2a+2622 = 1297-3045-5916a$

$-74a-124{,}2a+5916a = 1297-3045-1104-2622$

$-198{,}2a+5616a = -5474$

$5417{,}8a = -5474$

$\underline{\underline{a = -1{,}01}}$

3) $7x-4y=4$

$9x-2y=8 \quad |\cdot(-2)$

$7x-4y=4$

$-18x+4y=-16$

$7x+0=4$

$-18x=-16$

$7x-18x=4-16$

$-11=-12$

3) $7x+4y=4$

$9x-2y=8 \quad |\cdot 2$

$7x+4y=4$

$+18x-4y=16$

$25x+0=21$

$\underline{\underline{x=0{,}8}}$

4) 70579,6

100413,6

5)

$x + y = 60$

~~230x+~~

$230x + 310y = 250$

$x + y = 60$

$230x + 310y = 250$

~~$231x + 311y = 310$~~

Příloha č. 11 – Vypracovaná práce žáka Pavla

①
$(1,3+0,6)\cdot v = 4,2-0,4$

$1,9\,v = 3,8 \mid :1,9$

$v = 2$

Zk: $(1,3+0,6)\cdot 2 = 4,2-0,4$

$1,9\cdot 2 = 3,8$

$3,8 = 3,8$

$L_{(2)} = P_{(2)}$

②
$-74a+69\cdot[16-(18a+38)] = 1297-87\cdot(35+68a)$

$-74a+69(16-18a-38) = 1297-3045-5916a$

$-74a+69(-22-18a) = -1748-5916a$

$-74a+(-1518)-1242a = -1748-5916a$

$-1316a-1518 = -1748-5916a \mid +1518$

$-1316a = -230-5916a \mid +5916a$

$4600a = -230 \mid :4600$

$a = -0,05$

Zk: $\cancel{-74a+69\cdot[16-(18a}$

$-74\cdot(-0,05)+69\cdot[16-(18\cdot(-0,05)+38)] = 1297-87\cdot[35+68\cdot(-0,05)]$

$3,7+69[16-(-0,9+38)] = 1297-87\cdot[35+(-3,4)]$

$3,7+69(-21,1) = 1297-87\cdot 31,6$

$3,7-1455,9 = 1297-2749,2$

$-1452,2 = -1452,2$

$L_{(-0,05)} = P_{(-0,05)}$

③
① $7x+4y=4$
② $9x-2y=8 \mid \cdot 2$

① $7x+4y=4$
② $18x-4y=16$

$25x+0=20$

$25x=20 \mid :25$

$x=\frac{20}{25}$

$x=\frac{4}{5}$

$x=0,8$

$7\cdot 0,8+4y=4$

$5,6+4y=4 \mid -5,6$

$4y=-1,6 \mid :4$

$y=-0,4$

$[x;y]=[0,8;-0,4]$

Zk: ① $7\cdot 0,8+4\cdot(-0,4)=4$

$5,6-1,6=4$

$4=4$

$L_{(1)}=P_{(1)}$

② $9\cdot 0,8-2\cdot(-0,4)=8$

$7,2+0,8=8$

$8=8$

$L_{(2)}=P_{(2)}$

④ rozloha Rakouska . . . . . $(x+x+29834)-44049$ km² $\underline{83845}$ km² 211739 = 211739

rozloha ČR . . . . $x+29834$ km² $\underline{78864}$ km²

rozloha SR . . . . x km² $\underline{49030}$ km²

celkem . . . . 211739 km² 211739

$211739 = x+x+29834+(x+x+29834)-44049$

$211739 = 2x+29834+2x+29834-44049$

$211739 = 4x+89668-44049$

$211739 = 4x+45619 \mid -45619$

$4x = 196120 \mid :4$

$x = 49030$

Rozloha Rakouska je 83845 km², České Republiky 78864 km² a Slovenska 49030 km².

③ 1. druh kakaa . . . . á 230 Kč . . . . . x kg $\underline{45}$ kg

2. druh kakaa . . . . á 310 Kč . . . . y kg $\underline{15}$ kg

směs 1.+2. kakaa . . . á 250 Kč . . . . . 60 kg

① $x+y=60$

② $230x+310y=250\cdot 60$

$x = 60-y$

$230(60-y)+310y = 250\cdot 60$

$13800-230y+310y = 15000 \mid -13800$

$80y = 1200 \mid :80$

$y = \underline{15}$

$x+15 = 60 \mid -15$

$x = \underline{45}$

$[x;y] = [45;15]$

zk: ① $45+15=60$

$60=60$

$L_{(1)} = P_{(1)}$

② $230\cdot 45+310\cdot 15 = 250\cdot 60$

$10350+4650 = 15000$

$15000 = 15000$

$L_{(2)} = P_{(2)}$

Na namíchání ~~směsi kakaa~~ 60 kg směsi kakaa, kde bude 1 kg stát 250 Kč, je třeba 45 kg kakaa na 230 Kč/kg a 15 kg kakaa na 310 Kč/kg.

Příloha č. 12 - Vypracovaná práce žákyně Soni

① $(1,3+0,6)\cdot v = 4,2-0,4$

$1,9v = 3,8 \mid :1,9$

$v = 2$

Zk2: $(1,3+0,6)\cdot 2 = 4,2-0,4$

$1,9\cdot 2 = 3,8$

$= 3,8$

$3,8$

$L_{(2)} = P_{(2)}$

② $-74a+69\cdot[16-(18a+38)] = 1297-87\cdot(35+68a)$

$-74a+69\cdot(16-18a-38) = 1297-3045-5916a$

$-74a+1104-1242a-2622 = -1748-5916a$

$1168a$

$-1298a-1518 = -1748-5916a \mid +5916a$

$4748\ 4618a-1518 = -1748 \mid +1518$

$4748\ 4618a = -230 \mid :4618\ 4748$

$a = -\frac{115}{2374}$

③ $7x+4z=4$

$9x-2z=8 \mid \cdot 2$

$7x+4z=4$

$18x-4z=16$

$25x=20 \mid :25$

$x=0,8$

$7\cdot 0,8+4z=4$

$5,6+4z=4 \mid -5,6$

$4z=-1,6 \mid :4$

$z=-0,4$

Zk1: $7\cdot 0,8+4\cdot(-0,4)=4$

$5,6-1,6=4$

$4=4$

$L_{(1)}=P_{(1)}$

Zk2: $9\cdot 0,8-2\cdot(-0,4)=8$

$7,2+0,8=8$

$8=8$

$L_{(2)}=P_{(2)}$

4) rozloha celkom .... 211739 km²

Rakúsko ...... ~~x km²~~ $(29834+y)-y$ — 29834 km²

Slovensko ...... y km² — 76035,5 km²

ČR .... $29834+y$ km² — 105869,5 km²

$$[(29834+y)-y]+y+(29834+y)=211739$$

$$(29834+y-y)+y+29834+y=211739$$

$$29834+\cancel{y}-\cancel{y}+y+29834+y=211739$$

$$59668+2y=211739 \quad /-59668$$

$$2y=152071 \quad /:2$$

$$y=76035{,}5\ km^2$$

Rozloha Slovenska je 76035,5 km², ~~Ra~~ rozloha Rakúska je 29834 km² a rozloha ČR je 105869,5 km²

5) 1druh ...... 230 Kč/1kg .... x kg
2druh ..... 310 Kč/1kg .... y kg
připravit směs ..... 250 Kč/1kg ..... 60 kg

$x+y=60$

$230x+310y=\cancel{250 \cdot 60}\ 15000$

$\cancel{15000}$

$x=60-y$

$230\cdot(60-y)+310y=15000$

$13800-230y+310y=15000$

$13800+80y=15000 \quad /-13800$

$80y=1200 \quad /:80$

$y=15$

$x+15=60 \quad /-15$

$x=45$

Je třeba připravit 45 kg 1druhu kakaa a 15 kg 2druhu kakaa.